دكتور مجدى عزيز إبراهيم

المنطق والبرهان في تدريس الرياضيات

دار نهضة الشرق
للطباعة والنشر والتوزيع
٢٢ شارع طلعت حرب - القاهرة

الدكتور / مجدى عزيز إبراهيم

البرهان والمنطق
فى تدريس الرياضيات

دار نهضة الشرق
للطباعة والنشر والتوزيع
٣٢ شارع طلعت حرب - القاهرة

الكتـــــاب :	البرهان والمنطق في تدريس الرياضيات
المـؤلـــــف :	د . مجدي عزيز إبراهيم
رقـــم الطبعـــة :	الطبعة الأولى
تاريـــخ الإصـــدار :	يناير ٢٠٠٢ م
حقـوق الطبع والنشـر :	محفوظ للناشر
الناشـــــر :	دار نهضة الشرق – ٢٢ شارع طلعت حرب – القاهرة
تليفـــــون :	٥٧٩٥٩٦٠ – ٥٧٥٨٣٨٤
فاكـــــس :	٥٧٩٥٩٨٠
رقـــم الإيـــداع :	١٤٣٧٠
الترقيم الدولـــي :	977 – 245 – 164 - 6

تقـــديم

يدور موضوع هذا الكتاب حول موضوع : (البرهان والمنطق فى تدريس الرياضيات) . وهو من الموضوعات المهمة لمعلمى الرياضيات إذ تقوم عملية تدريس الرياضيات فى أساسها على البرهان والمنطق . وبدونهما لا يمكن أن يكون لتلك العملية وجود حقيقى . أو أية فاعلية تذكر .

والحقيقة . بات البرهان الرياضى مفهوماً رئيساً فى تدريس الرياضيات . عن طريقه يمكن التحقق من صحة القوانين والنظريات الرياضية . والتأكد من صدقها . لذا . يجب أن يسيطر المعلم سيطرة كاملة على جميع أركان البرهان الرياضى . وفهم طبيعته . وكيفية تطبيق هذه الأسس فى مختلف فروع الرياضيات .

ويقع الكتاب فى سبعة فصول . مرتبة على النحو التالى :

الفصل الأول : ويبحث فى الرياضيات .

الفصل الثانى : ويبحث فى أهداف تدريس الرياضيات.

الفصل الثالث : ويبحث فى أساليب الإقناع والاستقراء الرياضى .

الفصل الرابع : ويبحث فى المنطق الرمزى .

الفصل الخامس : ويبحث فى الحكم على صلاحية إستنتاج ما .

الفصل السادس : ويبحث فى البرهان الرياضى .

الفصل السابع : ويبحث فى نماذج من البراهين الرياضية .

إن هذا الكتاب ضرورة لازمة لمعلمى الرياضيات . وإضافة نافعة ومفيدة للمكتبة العربية . وفقنا الله فى خدمة مصرنا العزيزة .

أ. د. مجدى عزيز إبراهيم
كلية التربية بدمياط

الفصل الأول

الرياضيات

- تمهيد
- الرياضيات والتطبيقات العلمية .
- قوة الرياضيات وجمالها .
- القيم التربوية للرياضيات .

تمهيد :

تعنى الرياضيات بدراسة الكميات العددية والعلاقات بينها . كذا الكميات الفراغية والعلاقات بينها . وكذلك تعميم هذه العلاقات . وتتطلب دراسة هذه الكميات تعريفها بدقة على أساس خصائص معينة لها . ثم تستخدم تلك الخصائص - بالإضافة إلى قوانين منطقية معينة - لاستنتاج العلاقات الكائنة بين الكميات نفسها وبين علاقات سبق الحصول عليها. والفروع الرياضية بالنسبة للكميات العددية هى الحساب ، وبالنسبة للكميات الفراغية هي الهندسة . أما علم الجبر فيعتبر تعميماً للحساب ، وبالمثل تعتبر نظرية الأعداد التى تبحث فى خصائص الأعداد الصحيحة فقط تعميماً له . ويستخدم الجبر فى الهندسة التحليلية كأداة لتطوير النظريات الهندسية عن طريق استعمال مجموعات إحداثية .

والطريقة التحليلية لاغنى عنها فى دراسة حساب التفاضل والتكامل. وتعتبر أساسية فى جميع التطبيقات الرياضية تقريباً فى الطبيعة الحديثة والرياضة العالية .

تنقسم (الرياضيات) عادة إلى ثلاثة أنواع هى : الجبر (ويشمل نظرية الأعداد) والتحليل . والهندسة . ويشير التحليل هنا إلى ذلك الجزء من دراسة الرياضيات الذى يهتم أساساً بالنظريات المبرهنة عن طريق حساب التفاضل والتكامل ، وبإستخدام الطريقة ألتحليلية . أما فى التطبيقات الرياضية ، فينصب الإهتمام على تطبيق الخطط الرياضية فى الفروع الأخرى للعلوم.[1]

والرياضيات شأنها شأن أى فرع من فروع المعرفة العقلية ، لذا تتميز بالنمو والتغير . وهذا يمكن أن نلاحظه عند تتبعنا لتاريخ الرياضيات .

---

(١) محمد شفيق غربال ، الموسوعة العربية الميسرة ، الطبعة الثانية ، القاهرة ، دار الشعب ، ١٩٧٢ ، ص٩٠٥ .

الرياضيات والتطبيقات العلمية

الرياضيات لها دور ملحوظ في الصحوة العلمية والتكنولوجية ، التي يعيشها العالم الآن . فقد إمتدت الاستخدامات المختلفة لها . حتى شملت كثيراً من المجالات التطبيقية في العلوم الاجتماعية والإنسانية وإدارة الأعمال والسياسة ، كما لعبت دوراً مباشراً في التنمية الاقتصادية . "فالقيام بالتحليلات وإتخاذ القرارات والتخطيط والإدارة في الاقتصاد والمجالات الاجتماعية لم يعد ممكناً بدون وسائل رياضية متقدمة وآلات حاسبة قوية"(1) . بل " كل علم يجب أن يكون رياضياً وبدون التطبيقات الرياضية فإن الكائنات البشرية تعيش كالبهائم والحيوانات المفترسة لاتدري من أمر حياتها شيئاً(كما يقرر العلامة Weigel)"(2) .

والرياضيات فوق ما سبق . أصبحت أداة ضرورية للتعامل بين الأفراد في الحياة اليومية ، كما أنها تساعد في التعرف على مشكلات الأفراد ومشكلات مجتمعهم ، وتسهم في وضع حلول لهذه المشكلات . ومن ثم أصبح الفكر الرياضي من مستلزمات العصر الحاضر ، وعددت الرياضيات من المكونات الأساسية للثقافة التي لا يمكن الاستغناء عن دراستها في جميع قطاعات الحياة .

" كما تسهم الرياضيات بدور كبير في المجالات المتقدمة ، مثل التكنولوجيا والعلوم ، إذ أثبتت أنه لا غنى عنها لفهم التكنولوجيات والتحكم فيها . كما أن تطور العلوم يعتمد على الرياضيات ويكون مصاحباً لتطورها ، وذلك نتيجة لتزايد اعتماد العلوم على الأساليب الرياضية"(3). لدرجة أننا لانخطئ القول إذا إعتبرنا أن "الإهتمام المتزايد الآن في الرياضيات بالتركيب والنقاء الرياضي هو

(1) مارشال هـ . ستون ، ترجمة محمد حماد ، اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات ، المجلد الأول ، القاهرة: اليونسكو ، ١٩٧١، ص ٦٦ .

(2) مصطفى الخشاب ، علم الاجتماع ومدارسه . القاهرة : الدار القومية للطباعة والنشر ، ١٩٦٦، ص٢٨.

(3) وليم عبيد . المهارات الرياضية اللازمة لدراسة العلوم في المرحلة الاعدادية . القاهرة : دار النهضة العربية ،١٩٧٤ ، ص٧

فى جوهره اهتمام برفع درجة الاستخدام التطبيقى الفعال للرياضيات»[1] لذا يعلل (ألبرت أينشتن) سبب ضنيت الرياضيات الذائع ، بأنها «هي التى تمنح العلوم الطبيعية المضبوطة مقياساً معينا من الأمن ، الذى لا يمكن أن تبلغه بدون الرياضيات»[2] . أيضا ، عبر (كبلر) عن العلاقة الجوهرية بين الرياضيات والعلوم الطبيعية ، بقوله : « إن الله سمح لنفسه ، وهو يخلق الكون بأن يسير على هدى الاعتبارات الرياضية مستهدفاً بهذا منطقاً كونياً أو علاقات لتكون العلم»[3] .

أيضاً ، « كثير من مظاهر التقدم المثيرة فى عصرنا مثل الطيران الذى تفوق سرعته سرعة الصوت وإطلاق الأقمار الصناعية ، تعتمد مباشرة على استخدام ديناميكا الموائع ، التى تعتمد بدورها على استعمال حساب التفاضل والتكامل . كما أنه من المعروف الآن أنه لولا أعمال التحليل الرياضى (أمثال نوربرت واينر) ورجال الرياضيات التطبيقية (أمثال كلود شانون) ما كان يمكن التفكير فى الأعمال العظيمة فى الهندسة الميكانيكية . وفى التحكم «الاتوماتيكى» (التسيير الذاتى) وفى الاتصال عن طريق الرادار . كما أن البحوث الجارية فى الطبيعة الأرضية ، وفى الطبقات العليا الأيونية ، وفى المحيطات (اكتشاف تيارات المحيط العميقة) ، ومن داخل الأرض (نظريات المجال المغناطيسى) مرتبطة ارتباطاً وثيقاً مع ما تحرزه النظرية الرياضية من تقدم»[4] .

وتلعب الرياضيات دوراً عظيماً فى ميدان المسائل الاجتماعية ، من حيث استخدام الإحصاء الذى أصبح له دور أساسى فى السياسة العامة للدولة لأهميته الكبري فى تصميم وتنفيذ المشروعات الإصلاحية الكبرى . فلا يمكن أن يقدر النجاح لأى مشروع ، إلا إذا سبقته الدراسة الاحصائية ، التى تحتاج إلى

---

(1) وليم عبيد ، المهارات الرياضية اللازمة لدراسة العلوم فى المرحلة الاعدادية ، مرجع سابق ، ص ٧ .

(2) أ . ت . بل ، ترجمة حسن محمد حسين ، وآخرون ، رجال الرياضية ، القاهرة ، مكتبة الأنجلو المصرية ، ص ١٤ (د.ت).

(3) ر . جـ . فوربس ، أ. جـ . ديكتسر هوز ، ترجمة أسامة أمين الخولى ، تاريخ العلم والتكنولوجيا ، القاهرة ، مؤسسة سجل العرب ، ١٩٦٧ ، ص٢١٢.

(4) معصومه كاظم ، وآخرون . أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة . الطبعة الثانية . القاهرة ، دار المعارف، ١٩٧٠، ص ٢٨.

مدى واسع من التجهيزات الرياضية ، من الحساب الابتدائى الأولى إلى الفروع العميقة جدا من التحليل الرياضى . « وليست الحكومة هي الهيئة الاجتماعية الوحيدة التي تستخدم الاحصاء ، فشركات التأمين تستخدمه منذ زمن بعيد ، والمصارف والتنظيمات الأخرى التى تدرس إتجاه المعاملات تصل إلى تنبؤاتها بالتحليل الإحصائى ، وتثير دراسة الجو مسائل إحصائية كثيرة وصعبة جدا . ويستخدم الإحصاء فى تعيين كفاية طرق التعليم فى مدارسنا العامة»[١] .

« كما أن التطورات العلمية الأخيرة فى دراسة العلوم السياسية ادخلت نظريات رياضية عديدة ، مثل : نظرية الاحتمال ، كما تستخدم مادة الاحصاء ، وغيرها فى هذا الميدان .

وتستخدم الرياضيات فى عمليات التحليل ، وتقويم الرأى العام وإحتمالات البدائل ، وفى حساب النتائج المتوقعة للقرار ، وهذا واضح فى فروع علم السياسة ، مثل : النظرية السياسية ، الرأى العام ، العلاقات الدولية ، نظم الحكومات ، الاجتماع السياسى ، التحليل السياسى ، مناهج البحث ، كما أن صناعة القرار السياسى فى العصر الحديث تستلزم أن يقدم المشورة والتحليل مجموعة كبيرة من المستشارين والمساعدين ، الذين هم على دراية بالرياضيات والاحصاءات فى تقدير الموقف قبل اتخاذ القرار ، وخاصة القرارات الخطيرة التي تتصل بالحروب وامثالها»[٢] .

وتستخدم الرياضيات فى بحوث تاريخ الأدب وتحقيق النصوص ، وكذلك تستخدم بطريقة أوسع وأشمل فى علوم اللغويات ، إذ يمكن تجميع بيانات إحصائية عنها[٣] .

---

(١) ناثان أ. كورت ، ترجمة عبد الحميد لطفى ، الرياضيات فى اللهو والجد ، القاهرة : دار نهضة مصر ، ١٩٦٥، ص٦٥.

(٢) مجدى عزيز إبراهيم ، « مدى احتياج طلاب القسم الأدبى لمادة الرياضيات» ، بحث غير منشور للحصول على درجة الماجستير فى التربية (مناهج) ، كلية التربية جامعة أسيوط ، ١٩٧٥ ، ص٤٢.

(3) Mohsen Abou - Seida, A University Course In Modern Linguistics, kCairo : Al - Azher University. 1973.

كذلك من أهم نتائج البحث اللغوى فى القرن التاسع عشر الوصول إلى ما عرف بإسم (القوانين الصوتية) . وليست هذه القوانين قوانين تفرض على اللغة ويعاقب مخالفها، بل هى قوانين مفسرة تماما ، مثل قوانين الفيزياء والكيمياء ، حيث يخضع بناء الكلمة لهذه القوانين الصوتية ذات الطابع الرياضى[1] .

أيضا ، فإن علم التوبولوجيا (علم الهندسة المطاطة) تتزايد أهميته الآن لكل من الرياضيين ورجال الصناعة ، إذ بواسطته أمكن إثبات بعض النتائج التى نعتبر من أهم وأكثر النتائج إنتشاراً[2] .

" وهناك تطبيقات أخرى للرياضيات الحديثة والمعاصرة تظهر فى تصميم ما يسمى (بالعقول اللاكترونية) ، التى هى عبارة عن آلات حاسبة ذات سرعة جبارة، وكذلك فى الصناعات الخاصة بوسائل الاتصال ونظريات التعلم"[3] .

ما سبق سرده لهو مختصر مباشر ولمس سريع لتطبيقات الرياضيات العلمية فى بعض الميادين ، وبعامة ، لانغالى مطلقاً إذا قلنا أننا نعيش الآن فى "عصر الرياضيات" . لذا فهى تحتل مكاناً متميزاً بين العلوم لكثرة تطبيقاتها العلمية من جهه ، ولأنها أكثر هذه العلوم دقة ، ويقيناً ، واكتفاءً ذاتيا ، وإتصافا بالعقلية الخالصة . وتعد الرياضيات "لغة العلم" فى ذاتها ، فكمال النظرية العلمية فى إمكان التعبير عنها بصيغة رياضية . لذا لم يبعد عن الحقيقة من أطلق عليها اسم "ملكة العلوم" . وقد يعود ذلك بالدرجة الأولى إلي أنها تكون الشكل المثالى الذى يجب أن تكون عليه العلوم الأخرى . كذلك ، إذا أخذنا فى الإعتبار أن التقدم الحضاري يواكب التقدم العلمى ويعتمد عليه ، وأن التقدم العلمي يعتمد بدوره علي الرياضيات إعتماداً مباشراً ، يمكننا إدراك الأثر الفعال والمباشر لما قامت وما تزال تقوم به الرياضيات ، من أجل تحقيق الرفاهية والرخاء للبشرية ، إذ تعد الأداة المباشرة التى مهدت الطريق لتطور التفكير البشرى .

---

(1) محمود فهمي حجازى ، علم اللغة بين التراث والمفاهيم الحديثة ، القاهرة ، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر، ١٩٧٠ ، ص ٤٠ ، ص ص ٥٧ - ٦٠ .

(2) و . و . سوير ، ترجمة أديب عبد الله ، مدخل إلى الرياضيات ، القاهرة ، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر ، ١٩٧٠، ص ٣٤ .

(3) معصومة كاظم ،وآخرون ، مرجع سابق ، ص ٢٩.

قوة الرياضيات وجمالها

هناك حقيقة لا يستطيع أن يجادل فيها أى انسان مهما كانت قوة حججه وأسانيده . هذه الحقيقة هى أن الفرد قد يستطيع أن يتعلم جميع لغات العالم، لكنه يقف عاجزاً أمام السيطرة علي الرياضيات المعروفة الآن . لأنه حتى يستطيع إنجاز ذلك ليساير النمو الذى يحدث فى الرياضيات . يلزمه أن يقرأ بإمعان وإتقان يومياً عدة بحوث علمية مزدحمة بتفصيلات فنية . وذات طول لا يستهان به . وبالطبع ذلك فوق طاقة أى انسان .

ومن الأشياء التى توضح وتبرز قوة الرياضيات نذكر المثال الطريف التالى : تحير العلماء فى النظام الذى يمكن ان توجد عليه نواه الذرة . فهى تتكون من عدة من الجسيمات ذات الشحنات الموجبة . ومعروف أن الجسيم الموجب يطرد الموجب من مجاله بقوة جبارة . فكيف إذن يجتمع شمل هذه الجسيمات المتنافرة فى نواة الذرة . دون أن تنفجر وتتحطم ؟

ليس هذا فحسب . فالقوى التى تمسك هذه الجسيمات وتؤلف بينها . قوي ضخمة . غاية فى الضخامة . ويكفى أن نعرف ماذا يعنيه تفجير الطاقة النووية . وما ينتج عن ذلك من طاقات رهيبة يحسب لها العالم ألف حساب وحساب .

وأمسك علماء الرياضيات بأوراق وأقلام . وإنسابت عصارة أفكارهم لتسجل بالمعادلات والحسابات الدقيقة أسرار هذا الكون غير المنظور. لعل ذلك ينبئهم بوجود شيء لم يتوصل إليه علماء الذرة التجريبيون ... وفى عام ١٩٣٥ خرج عالم الرياضيات اليابانى الشاب (هيديكى) بنبؤة عن جسيم جديد يقوم فى النواة (كرسول) سلام يجمع بين (قلوب) الجسيمات المتنافرة ذات الشحنات الكهربائية المتشابهة . ويؤلف بينها فى نظام مذهل لا تستوعبه عقول الرجال.

الغريب أن (هيديكى) قد حدد أن كتلة الجسم المرتقب تتراوح بين ٢٠٠ - ٣٠٠ مرة قدر كتلة الالكترون (كتلة الالكترون تساوى جزءا واحداً من ألف مليون مليون مليون مليون جزء من الجرام : المليون مكررة أربع مرات) . أو أنه أصغر من

كتلة البروتون بحوالى ٦-٩ مرات . ولهذا أطلق عليه إسم (الميزون) . والميزون كلمة يونانية معناها "الوسط" أى أن كتلته جاءت وسطا بين هذا وذاك ... ليس هذا فحسب ، بل أن نبؤة معادلاته أشارت إلى أن هذا الجسيم لو خرج من نواة الذرة إلى عالمنا ، فلن يستطيع أن يعيش فيه إلا فترة زمنية جد قصيرة ... أى جزءاً واحداً من أربعين مليون جزء من الثانية ... وأسرار أخرى ليس لها هنا مجال .

ولقد كانت معادلات (هيديكى) صعبة عويصة ، وكانت تعقيداتها تصيب رؤوس علماء الرياضيات بالصداع ، ولهذا حور الظرفاء منهم اسم هيديك Headache أى الصداع ، لكن هذا الصداع قد حصل على جائزة نوبل بعد ١٤ عاما ، إذ تحققت نبؤته عندما حطم العلماء التجريبيون "قلب" الذرة ، وخرج منها الميزون المرتقب ، وبالمواصفات التى تنبأ بها العالم اليابانى[1] .

والواقع أن عدد الجسيمات الذرية ، التي تم اكتشافها بلغت الآن أربعين جسيماً ، وتلك الجسيمات لم تكن معروفة من قبل ، ويرجع الفضل فى اكتشافها إلى تنبؤات الرياضيين الأفذاء .

أيضاً ، تنبأت المعادلات الرياضية بوجود المجموعة الشمسية البعيدة وذلك قبل اكتشافها مباشرة بالمراصد الفلكية . فمثلاً ، اكتشف العالم الفلكى (سيرويليام هرشيك) كوكب (أورانوس) بالمرصد الفلكى عام ١٧٨١، ولكن الكوكب الذى يبعد عن الشمس ١٧٨٢ مليون ميل ، كان يبدو فى حركته ودورانه وكأنما هو "يهتز" و "يترنح" . وبمعنى آخر كان مسار ذلك الكوكب غير دقيق ، وربما السبب فى ذلك يعود إلى وجود كوكب آخر غير معروف ، وقد تنبأ عالم رياضى انجليزى شاب يدعى (جون آدمز) فى عام ١٨٤٥ بوجود كوكب آخر فيما وراء "أورانوس"، واستطاع ذلك العالم تحديد مكان الكوكب الذي تنبأ به ، وذلك باستخدام المعادلات الرياضية ، وقد أسر إلي إثنين من أساتذته بتنبؤاته ، إلا أن أحدا منهما لم يعر كلامه أى هتمام إلى أن توصل عالم الفلك الفرنسى

(١) عبد المحسن صالح ، التنبؤ العلمى ومستقبل الإنسان ، سلسلة عالم المعرفة (الكويت) ، العدد ٤٨ ، ديسمبر ١٩٨١ ، ص ص ٣٠ - ٣٢ .

الشهير (جان جوزيف لوفيريه) إلى نفس حسابات (آدامز) بعد ذلك بعام واحد . وقد وجه العالم الألماني (يوهان جوتفريد جال) منظاره الفلكي إلى الجهه التى تنبأت بها حسابات العالم الفرنسي . وبالفعل وجد الكوكب . وأطلق عليه اسم (نبتون) . ورغم أن شرف الاكتشاف ذهب إلى العالم الفرنسى دون العالم الإنجليزى، فإن علماء الفلك الحاليون يقدرون تماماً أهمية العمل الذى قام به العالم الإنجليزى . ويعترفون بفضله[1] .

لعل كل ما سبق سرده يبرز للقارئ بطريقة لا تقبل الشك - من قريب أو بعيد - أن الرياضيات كانت سلماً للفكر الصوفي . وكذلك للفكر العقلانى . فى مسيرة إرتقاء الإنسان . وذلك لأنها تعد أكثر العلوم إحكاما ودقة وأعمقها فكراً. إذ أنها كانت ولاتزال جزءاً أساسياً من التأمل النظرى الإنسانى . وذلك يؤكد النعت المنسوب إليها . ألا وهو : الرياضيات رغم أنها ملكة العلوم . فإنها خادمة العلوم فى ذات الوقت . وبعامة . نتيجة للاكتشافات العديدة والحديثة التى يصل إليها الرياضيون . فإنهم يعالجون الآن مشاكل لم تكن تخطر على البال . وكانت فيما مضى تعتبر غير رياضيه . لذا لا يمكن اعطاء تعريف واضح لمعنى الرياضيات . ولعل اقرب التعريفات لها . هو : " أن الرياضيات هى تصنيف ودراسة جميع الأنماط" . والمقصود بالنمط . هو المعنى الواسع . له بحيث يشمل تقريباً أى نوع من الإنتظام يمكن للعقل أن يميزه . ومما يلفت النظر، إن النمط قد يتكرر فى الطبيعة فى أكثر من مجال . فمثلاً . الرمز Δ^2 ف يظهر فى مجالات الجاذبية والضوء والصوت والحرارة والمغناطيسية والكهرباء الاستاتيكية والتيارات الكهربية والاشعاعات الكهرومغناطيسية والأمواج فى البحار وتحليق الطائرات وذبذبة الأجسام المرنة وميكانيكا الذرة . وذلك يوضح إننا أمام مفهوم رياضى واحد . له أكثر من تطبيق فيزيائى .

وتظهر قوة الرياضيات وجمالها عند الحديث عن التعميم والبساطة . إذ أن تعميم نتيجة ما يجعلها أكثر فائدة وأكثر بساطة . وذلك لأن النتائج الأقوى

---

(١) د. عبد المحسن صالح . مرجع سابق . ص ص ٣١ - ٣٢ .

أسـهل فـى تعلمهـا عن تلك الأضـعـف منها . فـالرياضـيات ، عـندمـا تتناول أى مشكلة بالبحث ، تهمل وتحذف المعلومات ، التى لا داعى لها ، حتى تبقى فقط الحقائق الأسـاسية . وبعامة ، تندر أن تذكـر أو تتضمن أية نظرية رياضيـة عامة شيئا معقـداً ، حتي لا تحول دون إنتباه الشخص للحـقائق المهمـة بها . ولعل المثال التالى ، خير دليل لتوضيح الفكرة السابقة .

استطاع (جوردان) بعد حسابات مـضنية أن يثبت نظرية ما تهدف إلي إثبات أن مجمـوعة معينة من كـثيرات الحدود ، التى تـظهر فى مجال دراسـة ما ، لها خاصـية مـعينة . إلى أن جـاء (هيلبرت) فى عـام ١٨٩٠ ، ليثـبت نفس النتيـجة بطريقـة سـهلة وبدون حـسـابات كثيـرة ، وذلك بـعـد التـخلص من ٩٠٪ من المعلومات التى استخدمها (جوردان) ، كما أنه أثبت أن النظرية يمكن تعميمها ، أيضا ، بالنسبة لجميع كثيرات الحدود .

يبين المثال السابـق أن الصيغ الرياضيـة الجيـدة لها الـقدرة على الجمع بين الأشياء المتباعدة تحت سقف واحد ، لأنه كلما زاد التعميم زادت البساطة .

أيضاً ، ما نذكره فيما يلى ، يبرز بوضوح ما نعنيه بقوة الرياضيات وجمالها :

١ - ظهرت أهميـة نتائج الصور الرياضية للمـشتغلين بالعلوم بعد اكتشـافها بزمن بعـيـد ، فـمـثـلا (كـبلر) اسـتـخـدم الـقطع الناقص - الذى درسـه اليونانيون قبله بألف عام - للتنبؤ عن حـركة الكـواكب . كما أن الرياضيات التى استخدمها (أينشتين) فى النظرية النسبية ، ظهرت قبل استخدامه لها بما يقرب من ثلاثين إلى خمسين سنة .

وفى المقابل ، فـإن النظريات الرياضية البالغـة فى الجمال ، والتى يعتـز بها الرياضيـون أنفسهم بسـبب أهميتـها الذاتية ، نشـأت قبل كل شىء فى مجال علم الفيزياء .

٢ - لا يوجد شىء يسعـد الرياضى أكثر من اكتشـافه أن شيئين كانا يعـتبران من قبل مختلفين تماما ، هما متطابقـان من الناحية الرياضية . أيضا ، فإن

الرياضى بدراسته لنمط ما ،لايشبع فقط رغبته الخاصة فى النظر بعمق للكيفية ، التي يسير بها الكون ، وإنما يأمل أن يكون لعلمه فائدة للأجيال القادمة . لذا لا يلتزم الرياضى بدراسة المشاكل التي ظهرت من قبل فحسب ، بل يجب أن يعد نفسه لتلك التى يحتمل أن تظهر فى المستقبل وهو بذلك عند حله لمشكلة ما ، قد يضع أساساً لنظرية رياضية جديدة . ولعل هذا ما دفع (فنتنل) أن يقول : "الرياضيون كالمحبين ... أعط الرياضى أقل المبادئ أهمية تجده يخرج منه بنتيجة أخرى ، وهكذا" . وذلك بالطبع يتوقف على بصيرة الرياضى ، التى تقوده إلى كل جديد فى مجال البحث الرياضى ، ويتوقف ، أيضا ، على إدراكه لما يحتمل أن تثبت أهميته . وذلك ما دعا (أرنست ماخ) أن يقول : " ربما يظهر غريبا ، أن تكون قدرة الرياضيات مرتكزة على إجتنابها لكل الأفكار غير الضرورية ، وعلى توفيرها العجيب للعمليات العقلية" .

وقد أظهرت فكرة قوة الرياضيات وجمالها رأيين متعارضين ، لكل منهما مؤيدوه ومعضدوه ، وهما :

الرأى الأول :

ويرى أصحابه أن جمال الرياضيات وليست فوائدها هو الغاية من دراستها ، ويستندون فى ذلك على أن القوة بدون الجمال تصبح معرضة للوهن ، لأن ممارسة الفرد لأي نشاط للوصول إلي نتيجة ما ، دون إحساسه بالرضا عند ممارسته له ، يجعله يؤديه بطريقة غير مرضية ، وذلك نتيجة لشعوره بالسأم والملل ، ويؤيد ذلك الرأى بطريقة غير مباشرة ما قاله (ك. فاير شتراوس) : "لا يمكن للرياضي أن يصبح رياضيا كاملاً ، ما لم يكن له شيء من موهبة الشعر" . وهذا يعنى أن الفرد لكي يمارس الرياضيات ، يلزمه أن يكون مهتما بها، وأن يستجيب لسحر النمط أو التصنيف المنطقى لها ، حتى يستطيع أن يضيف شيئاً لعلم الرياضيات .

أما الرأى الثانى :

فيرى أصحابه أن الغاية من دراسة الرياضيات هو نفعيتها فى حل المشاكل . ويستندون فى ذلك على أنه رغم القيمة التثقيفية للرياضيات ، فإن ذلك لا يعنى أنه لمجرد إرضاء الرياضيين لذواتهم بالبحث فى الرياضيات وجمالها ، أن ينسلخوا عن مجتمعهم ، ولا يسهمون فى حل مشكلاته ، ولاسيما المشكلات العاجلة الخاصة بالتنمية فى الدول النامية ، هذه المشكلات تتطلب تضافر جهود جميع العلماء بعامة ، وجهود الرياضيين بخاصة .

ومن وجهة نظرنا ، نرى أنه ينبغى التوفيق والموازنة بين الرأيين السابقين ، بحيث ينبغي لأية نظرية فى الرياضيات أن :

١ - توضح أسباب قوة الرياضيات وتعدد تطبيقاتها فى العلوم science ، وفى مختلف الميادين العلميه والتكنيكيه الأخرى .

٢ - تعطى تفسيراً لجمال الرياضيات وخلبها للعقل[1] .

القيم التربوية للرياضيات

نتيجة لعدم فهم طبيعة الرياضيات ، ونتيجة للنظرة السطحية لوظيفتها. ونتيجة لعدم الإهتمام بالقيم الإنسانية التى تتيحها دراستها ، لم يستطيع الكثير من الناس تقدير الجمال الحقيقى والقوة فى الرياضيات ، مما أدى إلي النظر لها على أنها أداة تسهم فى حل المشكلات التي تقابل الأفراد ، كل حسب طبيعة العمل الذي يقوم به . وبمعنى آخر ، يحتاج الفرد العادى إلى أقل قدر منها فى الاستخدام اليومى ، بينما يحتاج من يعمل فى مجالات تخصصية دقيقة ، إلى قدر أكبر منها .

وبالطبع ، تعد النظرة السابقة للرياضيات نظرة ضيقة محدودة ، لأن للرياضيات ، فى واقع الأمر ، قيماً تربوية تساعد على الاستمتاع بمناهج فهم

---

(١) و . و . سوير ، مرجع سابق ، ص ص ١٠ - ٣٦ .

العمل الرياضى فى حقيقته ، بطريقة أساسية صحيحة ، تتعدى ما وراء قواعد العدد والحساب . وهذه القيم التربوية يمكن تلخيصها فيما يلى :

(١) التجريد[1] :

يعرف الخبراء التجريد بأنه العملية الفكرية التى ينظم العقل بها الكليات ، أو المفاهيم والمعانى الكلية العامة من الجزئيات ، نحو تنظيم أجناس الذوات ، كالتراب ، والشجر ، والبشر ، والحيوان ، والهواء ، والنار ، والماء ، وأجناس المعانى ، كمحبة ، وسلم ، وبغضاء ، ووطنية ، وصعود ، وخلود ، ووجود ، وأجناس الصفات ، كصادق ، وحكيم ، وكرم ، وأحمق ، وما شاكل ، من جزئيات تلك الذوات ، والمعانى، والصفات . ومع أن التجريد العقلى للكليات مازال مجهول الجوهر ، إلا أن المنقبين يقولون أن فى التجريد عمليات فرعية ، من أهمها :

(أ) التصور والتصديق :

لابد للعقل فى كل أفعاله من التصور والتصديق ليتمكن من إدراك النسبة التامة الخبرية على سبيل الإذعان . فالتصور ، هو حضور صوره الشىء فى الذهن، أو عند العقل ، من غير إدراك لتلك النسبة . لكن ، إذا إقترن حضور الصورة بهذا الإدراك ، أصبح تصديقاً . ويصدق على صور المعقولات صدقه على صور المحسوسات . ولا تقتصر هذه الصور على حاسة واحدة ، بل هى عامة فى كل الحواس ، بحيث يكون منها البصرية ، والسمعية ، والشمية ، والذوقية ، واللمسية.

(ب) التحليل والتعميم :

التحليل بمعناها العام ، طريقة لدراسة العناصر الجزئية ، التي يجزىء بها العقل الموضوع المدروس ، بقصد إدراكها فى وحدات معنوية صغرى . فالتحليل - إذن - هو إدراك صفات المحسوس كاللون ، والحجم ، والهيئة ، وغيرها ، كل منها

---

(١) حنا غالب ، مواد وطرائق التعليم فى التربية المتجددة ، الطبعة الثانية ، بيروت : دار الكتاب اللبنانى ، ١٩٧٠ ، ص ص ١٢٧ - ١٣٤.

على حدة . أما إذا استطاع العقل أن يخرج بمفهوم مجرد عن كل محسوس جزئى ، فإن هذه العملية تسمى التعميم .

(جـ) البناء والتركيب :

أوضحنا فيما سبق أن العقل بالتحليل والتعميم المبنيين علي التصور والتصديق يجرد الكليات من الجزئيات . وبعد ذلك يستطيع أن يتصرف بها ويركب منها الأبنية والتركيبات ، وذلك على سبيل الخلق والإبداع .

وباختصار ، يشمل التجريد التصور والتصديق ، والتحليل والتعميم ، والتركيب . وكل هذه الفعال الفكرية مبنى على الإدراك الحسى ، الذى هو تعقل خفي للتأثير ، الذى يمكن أن يكون لفعل من الأفعال فى هدف نحاول بلوغه ، لما لهذا الهدف من قيمة أو فائدة لنا .

فى ضوء ما سبق ذكره ، لا نغالى إذا قلنا أن الرياضيات هى أكثر العلوم تجريداً ، وأن دراسة الرياضيات هى دراسة التجريد فى ذاته ، لأنها تفيد بصفة خاصة فى توضيح التفكير الذى يستطيع بالتالى أن يرتفع بالحالات الخاصة ، وأن ينتقل إلي خلق واستخدام مفاهيم لها عمومية واسعة . كما أن الرياضيات تعني بطرق تحليل الخبرة وتنظيمها طبقاً لأنماط شكلية معينة ، فمثلا ما يسميه الرياضيون "الاستمرار الحقيقى للعدد" يتضمن جميع الأعداد الصحيحة والكسرية والتخيلية أيضا ، وعليه فإن نظام الاعداد ما هو إلا خطة شكلية ، يمكن أن يحدد على أساسها كل الأطوال الممكن تنظيمها .

(٢) الحدس :

الحدس هو المعرفة المباشرة للأشياء دون جدل عقلى ، وهو إدراك بديهى للحقائق ، وتقدير سريع لما يعرض أمام أنظارنا ، من أشياء وأعمال[1] .

إن دراسة الرياضيات من الوسائل المعينة ، التى تحمل العقل على إدراك حقيقة الأشياء ، وعلى تعليل أو ربط الأسباب بمسبباتها، دون أية صعوبات أو

---

(١) عبد الحميد فايد ، رائد التربية العامة وأصول التدريس ، الطبعة الثالثة ، بيروت : دار الكتاب اللبنانى ، ١٩٧٥ ، ص ٦٤.

مشقة . كما أنها تسهم فى إدراك الفرد وبسرعة للأمور الذهنية ، التى تعرض عليه ، وأن يعطى رأيه فيها أيضاً ، وأن يدلي بالحجج والبراهين والأسانيد التى تعضد رأيه .

(٣) الفهم :

يرى (براونل) " أن فهم مبدأ ما يعنى أن الفرد يعرف كيف ومتى يستطيع استخدامه[1] . ويتوافق ذلك مع ما ذهب إليه (سبيتزر) فى تعريفة للفهم على أنه "إدراك للعلاقات"[2] .

ومن القيم التربوية التى لا يمكن الإقلال من شأنها فى دراسة الرياضيات ، هي أنها تتيح الفرص لمن يدرسها بفهم ، أن يدرك العلاقات بسهولة ، وأن يربط بين دقائق الأمور ، وأن يفهم ما يدور حوله من أحداث . وغير ذلك من الأمور ، التى لا يستطيع الفرد الاستغناء عنها فى حياته العملية .

(٤) المنطق :

لا يتفق الرياضيون والفلاسفة على ماهية العلاقة بين الرياضيات والمنطق . ولكنهم يتفقون جميعاً على أن التفكير الرياضى منطقى فى طبيعته ، وأن الرياضيات الصحيحة هى أيضاً بالضرورة منطقية فى طبيعتها . والواقع أن كل من المنطق والرياضيات يتضمن استنتاجات ، دون وجود تأكيد على حقائق خاصة بعالم الأشياء فى أى منهما ، ولكن التأكيد يقتصر فقط ، علي طريقة استنتاج فكرة من فكرة أخرى .

ومن القيم الفريدة فى دراسة الرياضيات ، وجود تلك الفرص الكثيرة لتعلم كيفية التفكير المنطقى ، ما لا يوجد إلا فى علم المنطق ذاته ، إذ إن هدف الرياضيات الأساسى أن توضح الفروض ، وأن توضح ما يمكن أن يستنتج منها .

---

(1) Brownell, William A. Measurement of Understanding. Forty Fifth Year Book. Part 1, The University of Chicago Press 1946, P. 411.

(2) Spitzer, Herbert F. The Teaching of Arithmetic, Second Edition , State University of Iowa, Houghton Mifflin Company, 1954, P. 11.

(٥) الاعتماد الشكلى المتبادل :

ان الأشياء التى تدخل فى الخبرة الإنسانية لا يمكن إعتبارها منفصلة تماماً بعضها عن بعض . ولكن يجب النظر إليها فى علاقات متشابكة مترابطة فجوهر المعنى فى الخبرة هي فى صحة الأحداث . فمن بين اسهامات الرياضيات أن نتناول بطريقة منظمة الأشكال الممكنة للإعتماد المتبادل . فالعلاقة تحدد بقاعدة . حيث يرتبط شئ أو أكثر بمجموعة من الأشياء الأخرى . والرياضيات تتناول البناء الشكلى لمثل هذه القواعد التى يقوم عليها الإرتباط .

فمثلاً (الدالة) توضح لنا الطرق الممكنة للإرتباط بين الأشياء . مما يجعل الطبيعة الأساسية للمعنى العقلى طبيعة حية . كذلك تمدنا الرياضيات بأكثر المعالجات وضوحاً وتنظيما للخصائص الشكلية للتحويلات الممكنة . وبهذا تقدم اسهاماً مهماً فى فهم الذكاء للأمور الإنسانية فهماً عميقاً .

(٦) اليقين :

الرياضيات فرع من المعرفة تكون فيه النتائج مؤكدة لامحتملة . نهائية لا مبدئية . فالفرض الثابت فى الرياضيات . يعتبر مؤكداً . لا يقبل المناقشة فى جميع الأوقات . والفروض الأساسية . التي تشتق من التعريفات والبديهيات فى أى نظام رياضى . ليست حقائق تخضع للإختبار والمراجعة . لذا فى عالمنا المتغير دائماً يجد الفرد نوعاً من السرور والرضا العقلى . بسبب اليقين الذى تقدمه الرياضيات.

ورغم اليقين الذى تتميز به الرياضيات . فإن ذلك لايعني أن جميع النتائج الممكنة . قد ثبتت صحتها بنجاح . ويعود ذلك إلى الفجوات فى التفكير المنطقى الخاص بميدان البحث فى الرياضيات من ناحية . وبسبب سوء التقدير من ناحية أخرى . وبعامة لا يوجد مدى لحدود البحث والكشف فى الرياضيات . لأنه بالربط المستمر . وإعادة الربط بين الأفكار . وبإقامة تعريفات جديدة وبديهيات جديدة . يمكن تكوين فروض جديدة . لذا فالرياضيات لها جاذبية خاصة. لأنها تمدنا بفرص عديدة لإكتشافات جديدة . تبقى ثابتة مدى الحياة .

(٧) الصرامة العقلية :

إن دراسة الرياضيات هى تدريب على العمل العقلى . ففى الرياضيات وحدها يصل مطلب الدقة والمنطق الخاص الدقيق (الصرامة العقلية) إلى أقصى الحدود . وتتضح الصرامة العقلية فى العرض التام للأسس التى تقوم عليها كل عبارة . وعليه تقترب الرياضيات - أكثر من أى نظام آخر - من المثل الأعلى للكمال العقلى . وبالتالى . فنقاء الرياضيات الصارمة ووضوحها ودقتها . تعد إنتصارات كبري للعقل الإنسانى .

(٨) لغة الرياضيات :

تتميز الرياضيات - كما أوضحنا فيما سبق - بالمستوى العالى فى التجريد . ومن ثم فهى تستخدم بدل الكلمات العادية لغة قائمة على الرموز . لتحقق أهدافها فى تحرير الفرد من قيود التخصيص . بما يلائم العمل التجريبى ملائمة تامة . إذ إن لغة الرياضيات تساعد على العد المعقد أو التوضيح أو البرهان بأكبر قدر من السهوله . و أقل فرصة فى الخطأ . وذلك ما يحتاج إليه الباحثون فى أى ميدان من ميادين المعرفة . كذلك فإن القدرة على استخدام الرموز من الهبات التى ينفرد بها الإنسان . وحيث ان البصيرة التى تتيح فهم طبيعة ووظيفة الأنظمة الرمزية الممكنة . هى إحدى القيم التربوية الأساسية للرياضيات . ولذلك فإن دراسة لغة الرياضيات التى تقوم على الرموز . يمكن أن تسهم اسهاما فعالا نحو تحقيق هذا الهدف .[١]

٩ - الرياضيات والواقع :

ان الرياضات هى الاساس الذى تستند إليه سائر العلوم . من بيولوجية واجتماعية ونفسية إلى علوم مادية بحتة . لذا ينبغى أن تتيح الرياضيات الفرصة لمن يدرسها أن يفهم معنى العمليات الرياضية . التى يقوم بها ومدى

---

(١) فيليب هـ . فينكس . ترجمة محمد لبيب النجيحى . فلسفة التربية . القاهرة : دار النهضة العربية. ١٩٦٥ . ص ص ٥٤٦ - ٥٥٤ .

هذه العمليات ودورها . وبمعنى آخر ، ينبغي أن تبين الرياضيات إن قوام الفن الرياضى أن نضع المشكلة المشخصة بوساطة آليات مجردة ومبسطة على شكل " عمليات " أو على شكل " معادلات " تنطبق على الواقع تماماً .

وينبغى ، أيضا ، أن يقف من يدرس الرياضيات على الفوائد ، التى يقدمها استخدام هذا النمط من العمليات أو المعادلات ، ألا وهى : دقة النتيجة ، وسرعتها ، وصحتها ، وعموميتها ، وعليه ، أيضا ، أن يدرك إن هذا النمط من العمليات ، لا يمكن ان تكون له مثل هذه الفوائد ، إلا بمقدار ما يمنحها له نشاطه الفكرى . ومن هنا ، كان من الضرورى أن يكتسب هذه الفوائد بنفسه ، وان يجعل منها عادات له وغايات لذكائه .

١٠ - الرياضيات والإبداع :

النظام عامل من عوامل الجمال ، وإذا ما إنضافت إليه الأناقة ، التى تعنى إختيار أسهل طريقه تؤدى إلى النتيجة ، غدا الجمال كاملاً ، وذلك ما تمتاز به الرياضيات ، لذا لا توجد أدنى غرابه أن يكون كثير من الرياضيين أناساً يهزهم سحر الفنون ، ولا سيما الموسيقى .(١)

١١ - الرياضيات المعاشية :(٢)

ويقصد بها الرياضيات ، التى نحتاج إليها فى تدبير بعض شئون معاشنا اليومية ، والتى نستعين بها على الإنتفاع بأوقات فراغنا بأقصى درجة ممكنة . هذه تختلف درجة استخدامها وتوظيفها فى الحياة اليومية من قطاع لآخر ، ومن فرد لآخر ، فسكان المدينة يستخدمون رياضيات تختلف عن تلك التى يستخدمها أهل القرى . كما ، تختلف حاجات المحامى من الرياضيات عن حاجات ربة البيت منها . ان الرياضيات المعاشية ، على الرغم من إنها إنعكاس لأسلوب

---

(١) رونيه أوبير ، ترجمة عبد الله عبد الدائم ، التربية العامة ، بيروت : دار العلم للملايين ، ١٩٦٧ ، ص ص ٤٢١ - ٤٢٣ .

(٢) دوجلاس . أ. كواد لينج ، ترجمة محمد محمود رضوان ، "تعلم الرياضيات إلى أى حد هو ضرورى؟" ، مجلة مستقبل التربية (اليونسكو) ، العدد الرابع ، ١٩٨٢ ،ص ص ٥ - ٦.

حياتنا الخاص ، فإن لها بعض الملامح المشتركة بينـــنا جميعاً ، نذكر منها مايلى :

١- يضطر الفرد إلى استخدام الرياضيات فى المواقف ، التى تتطلب استجابة فورية ، مثل : سداد أجر ركوب الأتوبيس ، أو تقدير التاريخ الذى يتم فيه تنفيذ عقد عمل ما ، أو إختيار المسافة المناسبة لفتحة العدسة حين التصوير بالكاميرا ، أو اتخاذ الوضع الملائم الذى يتوقع أن يقتحم منه المهاجمون فى مبارة رياضية ، ..... إلخ .

٢ - انها من النادر أن تستخدم عن طريق القلم والورقة (أو حتى عن طريق حاسب آلى جيبى) .

٣ - لا يكاد المرء أن يدرى حين يستخدم الرياضيات المعاشية ، إنه يستخدمها البتة . لكن ، هل يعنى هذا إن الرياضيات المعاشية ليس لها إرتباط يذكر بتدريس الرياضيات بصورته الرسمية ؟ الحقيقية ، يستطيع مدرسو الرياضيات أن يعاونوا التلاميذ فى تحصيل الرياضيات التى يحتاجون إليها فى حياتهم العملية وتعاملاتهم اليومية ، مع مراعاة إن هذه المهمة لاينفردون بها وحدهم ، وإنما يعاونهم فى ذلك غيرهم من المتعلمين ، والأدباء ، والآباء ، والاخوة .. إلخ ، "وذلك لأن الرياضيات المعاشية تتأتى -أساساً- عن طريق الخبرة والتجربة ، والاستفادة من التجارب التى مر بها أى من الكبار الذين يمكن أن يستعان بهم إذا وجدوا " .

الفصل الثانى

أهداف تدريس الرياضيات

* تمهيد .
* مصادر الأهداف .
* أهم خصائص الأهداف .
* أهداف تدريس الرياضيات :
  - الأهداف العامة لتدريس الرياضيات .
  - الأهداف الخاصة لتدريس الرياضيات .

تمهيد :

من المتفق عليه أن " التربية فى كل مجتمع تحقق وظيفة اجتماعية غاية فى الأهمية ، فى حدود الإطارات التالية :

١ - التربية عملية نقل العناصر الثقافية مادية ولا مادية إلى المواطنين ليكونوا صالحين لهذا المجتمع .

٢ - التربية هى عملية النقل فى وسط اجتماعى بشرى ، أى فى جماعات بشرية.

٣ - التربة عملية تفاعل اجتماعى ينتج عنه تغير وتكيف فى الفرد والمجتمع.[١]

ومعنى ذلك ، كما يقول (أحمد زكى صالح) : "التربية فى أصلها عملية تنشئه اجتماعية تهدف إلى تزويد الطلاب بالخبرات التى تؤهل الناشئ أن يشارك فى مجتمعه مشاركة طيبة ، فإذا إتفقت هذه الخبرات مع مطالب النمو، تحقق التوفيق بين حاجات الفرد وأهداف المجتمع".[٢]

وهذا المعنى ينطق بوضوح بأن أهداف التربية فى أى مرحلة تعليمية ، تستند إلى دعامتين، الأولى: الفلسفة العامة التى يقوم عليها المجتمع، والثانية: خصائص المتعلمين ومطالب نموهم.

وحيث أن المناهج التى تقدمها المدرسة ، ومنها مناهج الرياضيات ، هى الوسيلة الأساسية لتحقيق أهداف التربية بها، إذن أهداف تدريس أية مادة دراسية بعامة ، وأهداف تدريس الرياضيات بخاصة ، لا تختلف عن الأهداف العامة للتربية، بل أن أهداف تدريس المواد المختلفة ، لابد أن تشتق من الأهداف العامة ، وتوجه نحو تحقيقها، وهنا تقع المسئولية العظمى على المربين ، الذين ينبغى أن يعمل كل منهم من زاويته على تكوين المواطن الذى ينشده المجتمع، إذ

(١) على شلتوت ، "التربية بين العلم والفن والتكنولوجيا" ، صحيفة التربية ، السنة ٢٢، العدد الأول (نوفمبر ١٩٧٠) ، ص ص ٥٥ - ٦١ .

(٢) أحمد زكى صالح ، الأسس النفسية للتعليم الثانوى ، القاهرة : مكتبة النهضة المصرية ، ١٩٥٩ ، ص٣٣.

إن إعداد المواطن الصالح ، هو الهدف الرئيس للتربية، وعلى ذلك فإن الهدف الأساسى من تدريس الرياضيات ينبغى أن يكون المساهمة فى إعداد الفرد للحياة العامة ، بصرف النظر عن عمله أو تطلعاته فى المستقبل.

وقبل الإسهاب فى تحديد أهداف تدريس الرياضيات، والخوض فى غمار وأعماق تفاصيل هذه الأهداف، علينا أن نحدد إجابة واضحة للتساؤل التالى :

لماذا هذا الإهتمام المتزايد - على جميع المستويات - لتحديد أهداف تدريس الرياضيات ؟

إن الإجابة عن السؤال السابق ، تتلخص فى أن تحديد أهداف لتدريس الرياضيات ، تساعد على التخطيط والتقوم ، ولتوضيح ذلك نقول :

بات التخطيط الآن الوسيلة التى يؤخذ بها لتحقيق الأهداف، ذلك بداية من المستويات العليا الممثلة فى السلطة (الحكومة) إلى الفرد ، فبدون التخطيط تسير الأمور فى فوضية ، لا يستطيع إلا الله إدراك عاقبتها.

وبالنسبة لمدرس الرياضيات بخاصة ، إذا أراد بلوغ النجاح فى عمله، عليه أن يحدد الأهداف ، التى يسعى إلى تحقيقها، إذ إن تحديد الأهداف يساعد على تحديد الوسائل ، التى بوساطتها يمكن تحقيق هذه الأهداف، وبمعنى آخر، فإن الأهداف والتخطيط وجهان لعملة واحدة، فبدون تحديد أهداف لن يكون هناك تخطيط، كذلك بدون تخطيط لن تتحقق الاهداف.

فى ضوء ما سبق ، ينبغى على المدرس قبل دخوله حجرة الدراسة أن يكون مستعداً لموضوع الدرس الذى سيقوم بعرضه، أى يكون قد خطط تخطيطاً جيداً للدرس موضوع الشرح، وذلك يقتضى أن يضع فى إعتباره أسئلة من هذا النوع :

- ما المدخل الذى سيبدأ به شرح الدرس ؟
- ما أسلوب الشرح والمناقشة الذى سيتبعه أثناء شرح الدرس ؟
- ما حجم المادة العلمية التى سيقوم بشرحها ؟

- ما المفاهيم والحقائق والمهارات التى تحتويها المادة العلمية التى ستكون موضوع الدرس ؟
- ما الوسائل المعينة التى سيستخدمها فى شرح المادة العلمية ؟
- ما وسائل التقويم التى سيأخذ بها للوقوف على مستوى التلاميذ ؟

أيضاً، بعد خروجه من حجره الدراسة ، عليه أن يسأل نفسه الأسئلة التالية:

- هل استطاع تحقيق جميع الأهداف التى حددها سلفاً ، قبل دخوله الفصل؟
- هل صادفته صعوبات مفاجئة حالت دون تحقيق بعض الأهداف ؟
- ما الوسائل التى ينبغى مراعاتها مستقبلاً لتفادى الوقوع فى مثل هذه الصعوبات ؟

وواضح أن المدرس الذى يضع فى إعتباره مثل التساؤلات السابقة، يكون قد خطط لموضوع درسه تخطيطاً رائعاً ، مستهدياً فى ذلك بالأهداف التى يريد تحقيقها من تعليم موضوع هذا الدرس؛ وبذا يستطيع تقويم مستوى أداء التلاميذ ، وأيضا تقويم مستوى أدائه الشخصى .

مصادر الأهداف :

تتلخص مصادر أهداف تدريس الرياضيات ، فى الآتى :

(أ) التلميذ .

(ب) المادة الدراسية .

(جـ) المجتمع .

وفيما يلى تفصيل موجز للنقاط الثلاثة السابقة :

١ - التلميذ :

لم يعد الهدف الأساسى من تدريس الرياضيات العناية بالنمو العقلى للتلميذ، إنما إمتد إلى أبعاد وأوسع ليشمل النمو المتكامل لجميع أبعاد شخصية التلميذ، لذلك، ينبغى عند تحديد الأهداف مراعاة أن المادة العلمية التى يدرسها

تلاميذ مرحلة معينة ، يجب أن تتناسب مع خصائص النمو لتلاميذ هذه المرحلة، كما ينبغي ، أيضا ، مراعاة ما بين التلاميذ من فروق فردية فى القدرات، والميول ، والحاجات ، والآمال ، والمستوى الثقافى والاجتماعى والاقتصادى، والخبرات السابقة، على أن يراعى ذلك على مستوى الفرقة الواحدة، وعلى مستوى الفصل الواحد أيضا.

(ب) المادة الدراسية :

عند تدريس الرياضيات، لا ينبغى فقط مراعاة التتابع والتسلسل فى تدريس فروع الرياضيات المختلفة، إنما ينبغى ، أيضا ، مراعاة تتابع المفاهيم الرياضية التى يشملها كل فرع من فروع الرياضيات. كذلك ، ينبغى عند تحديد أهداف لتدريس الرياضيات مراعاة التطور السريع الذى يحدث فى مجالات بحوثها، وما يصاحب ذلك من تطور فى فروع المعرفة الأخرى ، سواء أكانت هذه أكاديمية أم عملية. لذلك ، ينبغى عند تخطيط مناهج الرياضيات مراعاة الخصائص التالية :

١ - تعتمد الرياضيات على بنيات وتراكيب منظمة من المعرفة ، فتكون سهلة الاستيعاب ومقنعه ، كما أن كفاءة البراهين التى تقوم عليها تجعل الثقة فيها بدرجة كبيرة.

٢ - تستخدم الرياضيات ألفاظاً مختارة بدقة ورموزاً محددة ، المعانى ، مما يجعلها لغة قوية فى التعبير، ووسيلة فعاله فى الإفهام والفهم.

٣ - تعنى الرياضيات بتعليم الطلاب طرق التفكير السليمة.

٤ - يظهر جمال الرياضيات فى قدرتها على تجميع عدد كبير من الأفكار فى نظام منطقى جميل ، معبر عنه برمزية بالغة ، لذا تمتاز بالتنسيق والنظام .

٥ - الرياضيات علم دراسة النماذج، فمثلا نجد لموجات الراديو ولشكل خلية النحل نماذج رياضية.

(جـ) المجتمع :

تضطلع المدرسة بمهمة إعداد التلاميذ لمواصلة دراستهم إلى مستويات أعلى ، إذا سمحت قدراتهم بذلك، أو لإعدادهم للحياة العملية، وهى تستعين

فى ذلك بالمناهج- ومن ضمنها مناهج الرياضيات- التى تقدمها. وعليه ، ينبغى عند تحديد أهداف لتدريس الرياضيات، مراعاة إعداد المواطن لمواجهة الحياة داخل المدرسة وخارجها. أى ينبغى النظر إلى الرياضيات على أنها إحدى مركبات الثقافة ، التى ينبغى أن يتسلح بها الفرد ليواكب ما يحدث فى مجتمعه أو فى المجتمعات الأخرى من تطور فى شتى الميادين ، كما ينبغى عند تحديد الأهداف ، الأخذ فى الإعتبار أن مجال تطبيق الرياضيات إتسع فشمل ميادين عدة.

أهم خصائص الاهداف :

يمكن تحديد أهم خصائص أهداف تدريس الرياضيات ، فيما يلى :

(أ) الشمول .

(ب) التنسيق .

(جـ) قابلية الترجمة إلى مواقف سلوكية خاضعة للتقويم .

وفيما يلى توضيح مختصر للنقاط الثلاث السابقه :

(أ) الشمول :

ويقتضى ذلك :

١ - السيطرة على مكونات البناء الرياضى (المفاهيم، والتعميمات ، والنظريات) .

٢ - استيعاب البرهان الرياضى .

٣ - المهارات فى إجراء العمليات الرياضية، على ان يتم ذلك بفهم.

٤ - القدرة على إكتشاف العلاقات المتداخلة بين فروع الرياضيات المختلفة.

٥ - القدرة على إكتشاف حلول مختلفة ومتنوعة للمسألة الواحدة.

٦ - القدرة على التفكير السليم.

وبإختصار، ينبغى أن تلم الأهداف بجميع جوانب عملية تدريس الرياضيات ، دون إهمال أى جانب منها.

(ب) التنسيق :

ويقتضى ذلك :

١ - التنسيق بين أهداف تدريس الرياضيات والأهداف العامة للتربية.

٢ - التنسيق بين أهداف تدريس الرياضيات وأهداف المدرسة.

٣ - التنسيق بين أهداف تدريس الرياضيات وأهداف تدريس المواد الأخرى.

٤ - التنسيق بين أهداف تدريس الفروع المختلفة للرياضيات.

(جـ) قابلية الترجمة الى مواقف سلوكية خاضعة للتقويم :

لا تخضع أهداف تدريس الرياضيات للتقويم . إلا إذا كانت قابله للترجمة إلى مواقف سلوكية . وعلى ذلك ، عند استخدامنا للعبارات التى تفسر الأهداف إلى مواقف اجرائية يمكن الحكم عليها ، ينبغى ان تكون دقيقة فى وصف السلوك . كذلك ينبغى أخذ ما يلى فى الاعتبار :

١ - أهداف الموقف التعليمى- ومن بينها تدريس الرياضيات- ليست كاملة أو نهائية. وذلك يعنى أنه رغم شمول أهداف تدريس الرياضيات وتنسيقها وترجمتها إلى مواقف سلوكية ، فإنه قد تطرأ على الموقف التعليمى متغيرات تلزمنا بضرورة مرونة هذه الأهداف لتقابل ما استجد من متغيرات.

٢ - أهمية إعطاء مدرس الرياضيات حرية الحركة فى التعامل مع أهداف تدريس الرياضيات، حتى يمكنه مراجعة هذه الأهداف بما يتناسب وتحقيقها، بشرط أن تسير أهداف تدريس الرياضيات جنباً إلى جنب مع أهداف التربية فى المجتمع، أيضا بشرط إعطاء الطالب أساسيات الرياضيات التى ينبغى أن يلم بها.

٣ - أن بعض أهداف تدريس الرياضيات، مثل : إكساب الطلاب التفكير السليم ، يحتاج إلى جهد مضنى من المدرس ، ووقت كبير من الزمن المخصص لموضوع الدرس . لذا ينبغى للمدرس عدم اليأس ومتابعة تقدم الطلاب فى إكتساب هذه الأهداف.

٤ - أهداف تدريس الرياضيات متكاملة ، ولا تتم كل منها بمعزل عن الاخر.(١)

---

(١) محمود أحمد شوق . الاتجاهات الحديثة في تدريس الرياضيات . الرياض : مطبوعات جامعة الرياض ، (د.ت) ، ص ص . ١١٨ - ١٣٠.

أهداف تدريس الرياضيات

يمكن تقسيم أهداف تدريس الرياضيات إلى :

١ - أهداف عامة :

وهذه تنقسم إلى :

(أ) الهدف النفعى . (ب) الهدف التثقيفى

٢ - أهداف خاصة.

وهذه تنقسم إلى :

(أ) الهدف التخصصى. (ب) الهدف التدريسى.

والأهداف السابقة ليست منفصلة أو متباعدة عن بعضها البعض، ولكنها متداخلة ومتشابكة ومتكاملة. وعلى ذلك ، فإن التقسيم السابق لا يعنى إن كل هدف بمعزل عن بقية الأهداف ، ولكنه يهدف إلى إلقاء الضوء بما يوضح اسهام كل هدف على حدة فى تحقيق أهداف التربية. وفيما يلى حديث موجز عن هذه الأهداف :

الأهداف العامة لتدريس الرياضيات

(أ) الهدف النفعى :

يحتاج كل فرد إلى الرياضيات فى مجال عمله ، وتختلف حاجة الفرد للرياضيات تبعاً لمدى سهولة المجال الذى يعمل فيه أو صعوبته.[1] .

كذلك ، تسهم الرياضيات فى إعداد دارسيها لمواجهة الحياة فى المجتمع الذى يعيشون فيه ، لأنها:

١ - تساعد على دراسة المواد الأخرى .

٢ - تدعم القدرة على التركيز والإنتباه.

٣ - تدعم القدرة على استخدام الأساليب الرياضية فى التعبير، ما يساعد على الوصول إلى التوضيح بأقصر طريق.

(١) يحيى هندام، محمد أبو يوسف ، تدريس الرياضيات ، الطبعة الثانية ، القاهرة : مكتبة النهضة المصرية ، ١٩٦١ ، ص ص ٩ - ١٢.

٤ - تساعد على متابعة التطور العلمى الذى يحدث فى مختلف المجالات التى يتضمنها المجتمع.

٥ - تساعد على فهم مظاهر النشاط الاقتصادى بصورة محددة ودقيقة.[١]

وجدير بالذكر فإن غالبية الموضوعات التى يشتمل عليه منهج الرياضيات المدرسى، هى "رياضيات للاستخدام"[٢]، ويمتد هذا بدءاً من المهارات البسيطة جداً كحساب الآحاد والعشرات، صعوداً إلى الموضوعات المتقدمة، مثل استخدام حساب التفاضل من أجل الحصول على القيم العددية للنهايات العظمى والصغرى. ويتضمن هذا النوع جميع الرياضيات، التى يحتاج إليها بعض الناس لكى يؤدوا أعمالهم بنجاح. كما يشمل الرياضيات المعاشية. وتكمن صعوبة هذا النوع فى أنها ترتبط إرتباطا مباشرا بمقتضيات الوظيفة التى يشغلها الفرد. وذلك لأن بعض الرياضيات تكون مفيدة فى ممارسة بعض الأعمال دون غيرها. وبمعنى آخر، هناك موضوعات رياضية تكون عديمة الجدوى تقريباً لمهن بعينها. فعلى سبيل المثال، يكون حساب المثلثات غير ذى نفع بالنسبة للصيادلة وموظفى المصارف والبنوك، بينما يكون له فائدة عظيمة الشأن بالنسبة للمهندسين والملاحين. ومن ناحية أخرى، لا تستطيع الكثرة الغالبة من أطفال المدارس تحديد نوع العمل الذى سوف تمارسه فى حياتها المستقبلة.

وهنا يبرز التساؤل التالى :

هل ينبغى تدريس جميع الموضوعات الرياضية التى يحتمل أن يحتاج إليها التلاميذ فى حياتهم العملية المقبلة. أم نقتصر على بعض الموضوعات العامة التى يجب أن يلم بها جميع التلاميذ ؟

الحقيقة إذا أردنا تضمين المنهج الدراسى لموضوعات الرياضيات، التى يحتمل أن يحتاج إليها العمل المهنى فى المستقبل، فإننا سنحمل هذا المنهج فوق ما

---

(١) وزارة التربية والتعليم، المناهج المعدلة للمرحلة الثانوية (١٩٧٠). القاهرة : الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية، ١٩٧٠، ص ص ٢٦٤ - ٢٦٥.

(٢) دوجلاس أ. كواد لينج، مرجع سابق، ص ص ٦ - ٨.

يطيق. ومن ناحية أخرى، إذا إقتصر الأمر على بعض الموضوعات العامة، لما خلص لنا من منهج الرياضيات إلا قدر ضئيل . وبخاصة أن معظم العاملين لا يستخدمون فى أعمالهم إلا قدراً ضئيلاً من الرياضيات. إن الرياضيات كأداة أساسية بالنسبة للعلماء ، بحيث لا يمكنهم الاستغناء عنها، كان المبرر وراء تضمين المنهج الدراسى بعض موضوعات رياضية بعينها . ولقد ترتب على ما سبق، ظهور اتجاه يحبذ وجود منظور بينى Interdisciplinary Perspective عند تصميم أى منهج، أى يجب وجود تزاوج بين الموضوعات التى يتضمنها المنهج. ويستند الإتجاه السابق على الفلسفة التى ترى أهمية عدم تعليم الرياضيات فى صورة منعزلة عن السياق الذى يضفى عليها معنى للتمليذ. وذلك لأن تعليم التلميذ للرياضيات قبل أن تكون لديه الخلفية الإدراكيه الأساسية، سوف يجعله يخفق فى استيعابها والتمكن منها، علما بأن الإخفاق فى تعلم درس الرياضيات يمكن أن يؤدى إلى الإحباط فى تعلم درس العلوم (مثلا)، اذ أن قدراً كبيراً من تدريس العلوم فى المدارس يعتمد إلى حد كبير على المهارات الرياضية وكثيراً ما يكون عدم السيطرة تماماً على هذه المهارات سبباً مباشراً فى تعثر كثير من التلاميذ فى تعلم العلوم.

أخيرا، يجب أن ندرك أن (الرياضيات من أجل الاستخدام) تخضع للتغير من حين لآخر، وذلك وفقاً لما يحدث من تطوير وتجديد فى مادة الرياضيات من ناحية، وفى استخداماتها فى المجالات العلمية من ناحية أخرى. فعلى سبيل المثال، حل الحساب الآلى الجيبى محل الحساب عن طريق اللوغاريتمات، وذلك بالنسبة لإجراء العمليات التى تحتاج إلى إجراء حسابات معقدة.

(ب) الهدف التثقيفى :

يمثل الفكر الرياضى أحد مركبات الثقافة الإنسانية العامة ، التى ينبغى أن يتزود بها كل فرد. لأن الرياضيات أصبحت أداة ضرورية أومساعدة أساسية فى الحياة اليومية، فالرياضيات هى لغة الأرقام . والأرقام بدورها لغة هذا القرن الذى يشهد العالم فيه الكثير من الإنجازات العظيمة فى جميع الميادين والمجالات

ومن خلال الرياضيات يستطيع الفرد أن يدرك بوضوح مظاهر التطور فى مختلف الميادين والمجالات الحيوية فى المجتمع.[1]

الاهداف الخاصة تدريس الرياضيات

(أ) الهدف التخصصى :

تساعد الرياضيات الطلاب على مواصلة الدراسة فى الجامعات والمعاهد العليا، وذلك لأن ما يدرسه الطلاب فى مراحل التعليم العام . هو القاعدة المتينة التى ترسو عليها الدراسة العالية بأمان.

كذلك ، يحتاج الباحثون للرياضيات فى مجال البحوث التى يقومون بها، لأنه عن طريقها يمكن إختبار صحة الفروض التى تقوم عليها هذه البحوث، لذلك فهى أداة لازمة تساعد على توجيه البحوث فى الطريق الصحيح[2].

(ب) الهدف التدريبى :

يرى البعض أن -الرياضيات الحقيقية- تكون عن التحديدات والبرهان والبنى المجردة، مثل: الأعداد الأولية، والنظريات الهندسية، ..إلخ، وهذه يمكن أن نطلق عليها إسم "رياضة الرياضيين".

ولكن، "من المؤكد أن هناك علة منطقية فى تدريس الرياضيات ، إذا نظرنا إلى الأمر من زاوية النفع والفائدة، وذلك لأن قدراً كبيراً ما تستأثر به الرياضيات من قدرة ، إنما يكمن فيما بين الحقائق من علاقات . وهذا هو السبب فى أن تذكرنا لقدر قليل من المعرفة ، يمكن أن يؤدى إلى استحضار قدر ضخم من المعارف، واذا كانت الرياضيات جديرة بالمكانة التى تحتلها فى المنهج الدراسى، فإن الواجب يحتم علينا أن يتأتى تعلمها بطريقة تؤدى إلى إبراز هذه العلاقات"[3]

---

(1) Udredningsserie,Nordisk , New School Mathematics In the Nordic Countries ,Stockhalm 5 Pohjoismainen Koulumatematikes, 1967, PP. 41 - 44.

(2) Aiyangar,N.Huppuswami , The Teaching of Mathematics in the New Education ForthEdition ,Delhi :The Universal Book and Stationary C., 1967 , pp. 19 - 22.

(٣) دوجلاس . أ. كوادلينج ، مرجع سابق ،ص ص ٨ – ٩ .

أيضا ، هناك جوانب أخرى لهذا النوع، من خلالها يحصل كثير من الناس على المتعة حينما يهتدون إلى حل بعض الأحاجى الرياضية، أو حين يلهون ويسمرون ببعض الألعاب التى تقوم على البناء الرياضى. فعلى سبيل المثال، يستمتع التلاميذ الصغار بمحاولة العد تباعاً إلى أقصى ما يستطيعون، وذلك بإتباع نظام عددى معين. كما ، يشعر التلاميذ بالزهو الذى يتأتى كنتيجة لاستقصاء بعض القوالب العددية، كمثال حاصل العمليات:

(١ + ٢ + ١)، (١ + ٢ + ٣ + ٢ + ١)، (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٣ + ٢ + ١) .... إلخ إلخ .

حيث نجد ان الحاصل على التوالى هو ٤ ، ٩ ، ١٦ .... إلخ، وهذه مربعات الاعداد ٢ ، ٣ ، ٤ على التوالى . كذلك، فان تعلم هذا النوع من الرياضيات، يدرب التلميذ على تحليل المعنى، وعلى سوق الشواهد، وعلى استبعاد مالا يمت إليه بصلة وآصرة .

وبعامة ، تهدف الرياضيات فوق ما تقدم إلى :

١ - فهم أساسيات الرياضيات (المفاهيم، القواعد، التركيبات، طبيعة البرهان).

تعنى بالفهم من الناحية السيكولوجية : إدراك العلاقات القائمة فى موقف يجابه الفرد ، وإدراك ذلك الموقف ككل مترابط، ومن الناحية العملية : التكيف الناجح لموقف يجابه الفرد، وهذا التكيف الناجح لا يأتى إلا نتيجة لفهم العلاقات القائمة فى المواقف وتمييز العناصر الرئيسة فيه.

ويلعب الفهم الدور الأول والأساسى فى كل خطوة من خطوات التدريس، وبذلك يكون عامل الفهم أساسيا فى التغلب على أنماط الأخطاء الشائعة، فإدراك التلميذ لمعنى ما يقوم به ، ويسهل عليه أداء العمل . كما يوضح له السبب فى إختيار الأسلوب الذى يتبعه والسبب فيه. وهذا يتفق مع نظرية المعنى ، التى تؤكد على أهمية إدراك التلميذ لمعنى ما يعمله والسبب فيه. وقد أثبتت الأبحاث أن الفهم هدف أساسى يمكن تحقيقه من تدريس الرياضيات . وفى المقابل ، فإن التدريس الآلى يقتل روح الإبداع لدى التلميذ.

والمقصود بفهم أساسيات الرياضيات ، هو ادراك أو معرفة أو تمييز أو ذكر المعلومات الرياضية الأساسية: المفاهيم، والعلاقات، والقواعد، والقوانين واستعمالها، وإجراء الحسابات، برهنة النظريات ، العناصر والتعريفات والبديهات لتركيب رياضي وبرهنة النظريات فيه، بالإضافة إلى هذا . تكوين هذه الأساسيات فى ذهن الفرد، وذلك يستدعى معرفة أساس ودلاله ما يتعلمه الفرد، أى يتطلب معرفة "كيف ؟"، "ولماذا ؟" .

وتكوين الأساسيات فى ذهن التلميذ يأتى عن طريق الفهم، والفهم لا يأتى عن طريق نقل المعلومات ، ولكن عن طريق ممارسة التلميذ الفرص التى عن طريقها يكتشف أو يعيد بناء المعلومات الرياضية وأساسياتها بنفسه. وفيما يلى توضيح لما نعنيه بفهم القواعد والمفاهيم والتركيب الرياضى وطبيعة البرهان:

القاعدة (القانون أو الخاصية) :

ان معرفة التلميذ للقاعدة واستخدامها فى إيجاد إجابات صحيحة ، لا يعنى فهمه لما يعلمه ، أو حتى معرفته للمفاهيم الأولية لهذه القاعدة. فمثلاً ، عند قسمة كسر على كسر ، يضرب التلميذ الكسر الأول فى مقلوب الكسر الثانى، وبذا يحصل على إجابة صحيحة، وذلك بالطبع دون معرفة السبب الذى جعله يفعل ذلك.

إن فهم قاعدة، قسمة كسر على كسر يتطلب تكوين المفاهيم الأولية التالية فى ذهن التلميذ:

* العملية ومعكوسها (عملية الضرب معكوسة عملية القسمة) .
* العنصر المحايد فى عملية الضرب .
* خاصية ضرب بسط ومقام كسر فى أى عدد لا يساوى الصفر لا يغير من قيمة هذا الكسر.

المفهوم الرياضى :

يمكن ان نعرف المفاهيم -بعامة - بأنها عبارات أو رموز لفظية تدل على معلومات وأفكار مجردة لأشياء أو خبرات معينة ، ذات صفات أو خصائص مشتركة.[1] .

---

(١) أحمد خيرى كاظم ، سعد يسى زكى ، تدريس العلوم ، القاهرة : دار النهضة العربية ،١٩٧٦ ، ص ٧٢.

ونعنى بالمفهوم الرياضى ذلك التجريد العقلى للصفات المشتركة بين فئه من الخبرات أو الظواهر. وذلك يوضح أن المفاهيم الرياضية لا تكتسب قيمتها إلا من خلال التنظيم التجريدى الذى يدرس علاقاتها. فمثلا ، مفهوم مثل مفهوم التوازى ، هو تجريد لجميع المستقيمات الواقعة فى المستوى ، ولا تتلاقى مهما إمتدت. كذلك ، مفهوم العدد ، هو تجريد للخاصية المشتركة بين الفئات التى تحتوى على نفس عدد العناصر. أيضا ، مفهوم عملية الجمع ، هو تجريد لخاصية مشتركة لإتحاد الفئات غير المتقاطعة. وبالمثل مفهوم التساوى ، هو خاصية مشتركة بين الفئات المتكافئة.

والجدير بالذكر "ان المفاهيم الرياضية، حتى وان كانت من أصل تجريبى بالفعل، فسيظل من الصحيح إن الرياضيات قد إنفصلت عن ذلك الأصل التجريبى، وأنها قد أصبحت علماً بريئاً من الصفات المحسوسة. فعندما يفكر الرياضى فى الخط المستقيم، فهو لا يفكر فى خيط البناء. وعندما يثبت أن المنصفات تتلاقى فى المثلث، فإن البرهان يكون مستقلاً عن التحقيق المادى لهذا الشكل، ومن المحال أن يحل البيان بالرسم محل برهان بالاستدلال، إذ ليس للرسم من عمل سوى أن يكون دعامة للإنتباه، دون أن يكون عنصراً مكوناً للبرهان ("فالتصورات الهندسية تصورات فكرية") كما أكد ذلك الفليسوف الرياضى الألمانى (هوسرل)"[1].

فى ضوء ما سبق، يمكن التأكيد على إن عملية تكوين المفهوم فى ذهن التلميذ تتأتى عن طريق تكوين المفاهيم والعلاقات الأولية الأساسية لذلك المفهوم، فمثلا، لا يدل معرفة التلميذ للعدد وتمييزه وعده على فهمه لمفهوم العدد نفسه ، إذ إن العدد مفهوم مركب يتطلب فهمه معرفة مفاهيم أساسية، مثل: الفئات المتكافئة، التناظر الأحادى، علاقة الترتيب.[2]

(١) بول موي ، ترجمة فؤاد حسن زكريا ، المنطق وفلسفة العلوم ، القاهرة ، دار نهضة مصر (د. ت) ، ص ص ١٣٦ - ١٣٧ .

(٢) نظله حسن أحمد خضر ، أصول تدريس الرياضيات ، القاهرة ، علم الكتب ،١٩٧٤ ، ص ٢١.

التركيب الرياضي:

تعنى كلمة "التركيب" فى نظر (جوبلو) : التركيب المرسوم، والعملية الجبرية، والعملية الذهنية، وتركيب النتيجة مع الفرض. ولعل ما يقوله فى ذلك يوضح ما يعنيه: "إن أهمية التركيبات المرسومة فى الهندسة لم تخف على أحد، ولكن المناطقة يميلون إلى أن يروا فيها مجرد أشكالها الهندسية . كما يقول "ليس ثمة قضية حسابية أو جبرية لا يبرهن عليها عن طريق عملية أو سلسلة من العمليات." كذلك ، يقول "ليست العمليات التركيبية عمليات عقلية، وانما هى عمليات تنفذ ذهنيا". وفى فقره أخرى ، يقول (جوبلو): "لكى نبرهن على إن فرضاً ما ، يستتبع نتيجة ما، نركب النتيجة مع الفرض". وبذا ، يريد أن يؤكد على وجه التحديد ، أن "النشاط التركيبى للعقل هو الذى يظهر النتيجة الجديدة"[1]

والذى يعنينا هنا ، ونود التركيز عليه ، هو إن أى تركيب رياضى بعامة، يتكون من (مسميات) وعلاقات ، أو عمليات أوليه وبديهيات، ونظريات مشتقه، ذلك بشرط أن يتوفر فى هذه المكونات التآلف والاستقلال والتصنيف. ولكن ، لايعنى معرفة التلميذ للتركيب الرياضى سيطرته على الموقف تماماً، إذ ينبغى بجانب ذلك فهمه لأساس ما يتعلمه ، حتى يستطيع أن يعرف أهمية ودلالة العلاقة بين مكونات وخصائص أى تركيب، وأن يعرف كيف يصنف مكونات أى تركيب إذا كان غير مصنف أو غير متآلف، وبذا يستطيع أن يسهم فى خلق تركيبات جديدة ، مما يساعده على التعميم والتطبيق فى شتى المواقف.

طبيعة البرهان :

ان معرفة التلميذ لطرق البرهنة المختلفة ، والتمييز بينها ، لا يعنى فهمه لطبيعة البرهان ، إذ إن فهم طبيعة البرهان يتطلب معرفة الأسس المنطقية التى يقوم عليها البرهان ، وكيفية تطبيق هذه الأسس فى مختلف فروع

(1) بول موى ، مرجع سابق ، ص ١٣٢.

الرياضيات (الهندسة -الجبر- التفاضل والتكامل- الإحتمالات..). كما يتطلب أيضا معرفة الطالب لدلالة وأهمية برهان الوجود وبرهان الوحدانية.

ويتوقف الفهم بعامة (أو إعادة تكوين الأساسيات فى ذهن التلميذ أو إكتشافها) على طبيعة المفهوم ، و الخاصيه الرياضية من ناحية أخرى. فمثلا ليفهم أن :

كمية سالبه × كمية سالبه تنتج كمية موجبه ، أى (- س) × (- ص) = + س ص، يكون من الأفضل جعل التلميذ يكتشف ذلك بنفسه، وذلك بإعطاء معنى ملموس للكميات الموجبه والسالبه. كذا بإعطاء معنى لحاصل ضرب كمية × عدد موجب، وحاصل ضرب كمية × عدد سالب، وفى النهاية اعطاء معنى لحاصل ضرب كمية سالبه × كمية سالبه، وذلك كما يلى:

	٣	٢	١	صفر	-١	-٢	-٣
٥	١٥	١٠	٥	صفر	-٥	-١٠	-١٥
-٥	-١٥	-١٠	-٥	صفر	+٥	+١٠	+١٥

وبالنسبة للسن المتقدمة ، عندما يكون التلميذ مستعداً لفهم القاعدة أو القانون ، فذلك يتطلب معرفته للبرهان المنطقى لهذا الاساسى، فمثلا:

اذا كانت أ، ب $\Longrightarrow$ ح (أى للعددين الحقيقين أ، ب) سيكون :

-أ (صفر) = صفر (خاصية الصفر)

-أ [ب + (-ب)] = صفر

(-أ) × (ب) + (-أ) (ب) = صفر

وحيث أن (-أ) ×(ب) = -أب ، فإن :

-أب + (-أ) × (-ب) = صفر $\Longleftarrow$ صفر، لابد أن يكون

-أ × - ب المعكوس للكمية - (أب).

أى أن : -أ × -ب = أب

٢ - تنمية التفكير المجرد ، وأسلوب التفكير السليم ، واستخدامه فى مختلف شئون الحياة :

يعيش العالم الآن فى ثورة علمية وتكنولوجية تشمل جميع الميادين والمجالات، وقد نتج عن ذلك تقدم سريع فى العلوم والتكنولوجيا، بحيث تخلفت عنها عناصر الثقافة الأخرى، وعلى وجه الخصوص فى مجالات السلوك الخلقى والفكرالاجتماعى، لذا ينبغى إعداد الطالب للتكيف مع العالم المتغير المحيط به[١] . وبالطبع فإن وسيلة تحقيق ذلك ، هى المناهج التى تقدمها المدرسة ، ومن بينها مناهج الرياضيات، لذا ، ينبغى أن تعمل المناهج على تنمية التفكير المجرد وأسلوب التفكير العلمى السليم ، لمواجهة ما قد يقابل الطلاب من مواقف جديدة فى حياتهم داخل المدرسة وخارجها . وبعامة ، يعد التفكير عامل أساسى فى توجيه الحياة ، وعنصر جوهرى فى تقدم الحضارة لخير البشرية، ويمتاز التفكير السليم بما يلى:

(أ) لا يتأثر بالإنفعال أو العاطفة، ولا يخضع للأهواء الشخصية ، والآراء الذاتية، لأنه يقوم على الحقائق الدقيقة ، وعلى التأنى والروية وعدم الإندفاع، كما يقوم على البحث والتأمل وجمع المعلومات اللازمة قبل إصدار أحكام معينة.

(ب) انه لا يقبل رأياً إلا إذا قام الدليل على صحته ، وأثبتت الأساليب المختلفة من مشاهدة وتجارب ومعلومات إنه رأى سليم، وبذلك فإن الانسان لا يقبل رأياً ، أو يعرض عن رأى ، إلا بعد بحثه وفحصه وإخضاعه للأساليب المختلفة، لاختبار مدى صدقه ومدى صحته.

(جـ) ان إكتساب الأساليب السليمة فى التفكير ، يؤدى بالفرد إلى الحيوية ، فيتسع صدره للنقد البناء، ويتقبل آراء غيره، بل ويعدل آراءه فى ضوء ما يثبت صدقه من حقائق ، ومايجد من براهين، وفى هذا المجال ، فإنه ينتفع بنتائج التفكير ، وبما يصل إليه الآخرون من آراء علمية سليمة، أى إن هذه الأساليب تؤدى إلى المرونة ، وتجعل الإنسان يتخلص من الجمود.[٢]

(١) محمد الهادى عفيفى ، التربية والتغير الثقافى ، الطبعة الرابعة ،القاهرة ، مكتبة الأنجلو المصرية ، ١٩٧٥ ، ص ص ٢٣٣ - ٢٣٦.

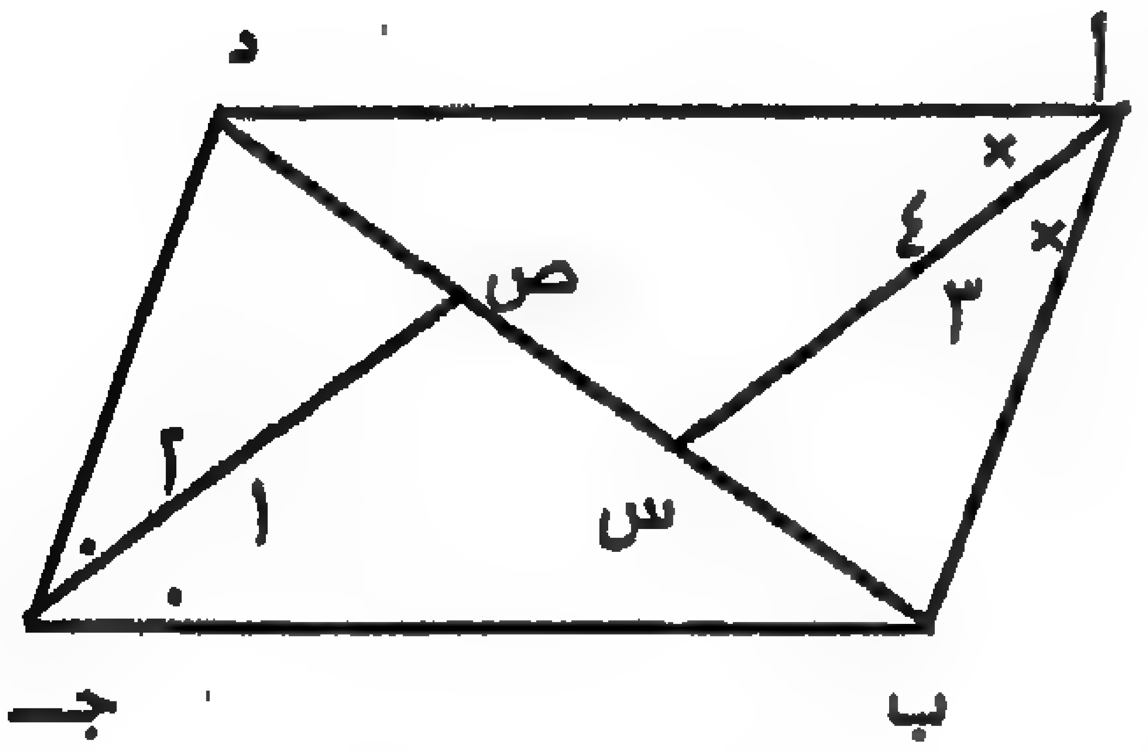
(٢) أحمد أبو العباس ، الرياضيات ، أهدافها وطرق تدريسها ، الطبعة الأولى ،القاهرة ، دار النهضة العربية، ١٩٦٣ ، ص ص ١٨٢ - ١٨٥.

ونقصد بطرق التفكير فى الرياضيات أساليب التفكير، التى تستخدم فى البرهنة، وفى حل المشكلات (المسائل)، وفى الاكتشاف الرياضى. ويستطيع المدرس مساعدة الطلاب ليكتسبوا طرق التفكير المختلفة، فمثلا:

١ - يستطيع المدرس أن يكسب الطلاب **التفكير الدقيق** ، الخاص بإكساب الطلاب المهارة فى حل ما يواجههم من مواقف، وفى التعبير عن أفكارهم. وذلك عن طريق أن يكون القدوة الحسنة فى التعبير عن أفكاره بدقة، كما يطلب منهم أيضاً الدقة فى التفكير والتعبير، سواء فى مناقشاتهم الشفهية أم فى الاعمال التحريرية.

٢ - يستطيع المدرس أن يكسب الطلاب **التفكير التأملى** ، الخاص بتحليل الموقف إلى عناصره المختلفة ، والبحث عن العلاقات الداخلية بين هذه العناصر. وذلك عن طريق مساعدتهم على تحليل المسائل ورسم خطة الحل أولا.

والمثال التالى يوضح ما نعنيه بذلك:



أ ب حـ د متوازى أضلاع ، نصفت زاويتاه أ ، حـ بمنصفين لاقيا القطر د ب فى س ، ص على الترتيب ، إثبت أن : أس = حـ ص

حيث إن المطلوب هو إثبات أن : أ س = حـ ص، إذن المفروض أن تكون نقطة البداية البحث عن كيفية إمكان تساوى قطعتى مستقيم (أ س = حـ ص)، وذلك عن طريق فرض الفرضين التاليين، والتأكد من صحتهما أو صحة أحدهما على الأقل:

١ - هل أ س، حـ ص ضلعان فى شكل هندسى منتظم ؟

ذلك الفرض لا يتحقق .

٢ - هل أس ، حـ ص ضلعان متناظران فى مثلثين متطابقين ؟ ذلك الفرض صحيح، لأنه يمكن إثبات إن المثلثين أس د ، حـ ص ب يتطابقان ، كذا يمكن إثبات إمكانية تطابق المثلثين أ س ب ، حـ ص د .

٣ - يستطيع المدرس أن يكسب الطلاب **التفكير الاستقرائى** ، الخاص باستنتاج قاعدة عامة من عدة حالات خاصة، وذلك عن طريق إعطاء الأمثلة التى توضح ذلك، فمثلا عن طريق القياس يمكن أن يثبت الطالب إن مجموع زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠° . كذا يمكن أن يثبت إن مجموع مقياس الزاويتين المتجاورتين الحادثين من تلاقى مستقيم بشعاع = ١٨٠° ، وايضا يمكن ان يتحقق من صحة نظرية (فيثاغورث). ورغم أهمية الاستقراء ، ينبغى ألا يغالى المدرس فى استخدامه فيعتمد عليه كوسيلة للبرهان، ولكن ينبغى أن يستخدمه كوسيلة جيدة يمكن عن طريقها الكشف عن ما بين الموضوعات من علاقات متشابكه .

٤ - يستطيع المدرس أن يكسب الطلاب **التفكير الاستدلالى** ، الذى يعتمد على المنطق، وذلك عن طريق توضيح أن كل خطوة من خطوات التفكير الاستدلالى لابد وأن تكون مدعمة بقضية صحيحة. كذا توضيح أن أى خطوة غير مدعمة لا تعتبر صحيحة. فمثلا ، لإثبات أن القوس أ س = القوس ب ص ، ينبغى التحقق من أحد الشروط التالية :

(أ) مقياس الزاوية المركزيه التى تقابل أ س = مقياس الزاوية المركزية التى تقابل ب ص.

(ب) الزاوية المحيطية التى طول قوسها أ س = الزاوية المحيطية التى طول قوسها ب ص.

(جـ) طول الوتر أ س = طول الوتر ب ص.

والواقع إن الأساليب السابقة لا يمكن فصلها، إذ قد يستخدم المدرس أثناء شرحه أكثر من أسلوب . والذى يعنينا إنه عن طريق هذه الأساليب ، كل منها منفرداً ، أو متجمعة كل أثنين منها أو أكثر، هو اكساب الطلاب التفكير الفعال فى مواجهة المشاكل فى مجال دراسة الرياضيات، فهذه الأساليب تساعدهم على البرهنة وحل المسائل، وهذا يدخل فى نطاق الخلق والإبداع والاختراع. فالتلميذ أثناء حله للمسألة يكون كالفنان المبدع، إذ يمارس المتعة واللذة والالم

التى يمارسها الفنان فى عملية الخلق والإبداع . وتصل عملية الحل إلى قمتها وإلى ذروتها فى اللحظة ، التى تتجمع فيها العناصر فى أماكنها المناسبة فى المجال المباشر للتفكير. فيظهر الحل فجأة . عند هذه اللحظة التى يظهر فيها الحل ، فإن التحليل يسبقها ، ويأتى بعدها التركيب.

بالإضافة إلى ذلك ، فإن التفكير الفعال الذى يمكن أن يكتسبه الطالب عن طريق الأساليب الأربعة السابقة . يساعد الطالب أيضاً فى حل مشكلاته اليومية . أى لم يعد الأمر يقتصر فقط على استخدام هذه الأساليب فى حل مسائل الرياضيات ، ولكنه يصبح سمة مميزة تلازم الطالب ويستخدمها فى حل المشكلات التى تصادفه . حيث يتطلب الوصول من الحقائق المعطاة إلى الهدف المطلوب ، دراسة الحقائق والعلاقات ، ورسم الخطة لعبور الفجوة بين المعطيات والمطلوب ، وإختيار الوسائل اللازمة لذلك . وفى النهاية التأكد من الوصول إلى الهدف المنشود.

وحتى يمارس التلاميذ أساليب التفكير السابقة من خلال دراسة الرياضيات. يحاول مدرس الرياضيات تحقيق ما يلى:

(أ) ممارسة التلميذ لأساليب التفكير المختلفة السابقة ممارسة عملية داخل وخارج الفصل.

(ب) إدراك التلميذ لحدود الثقة فى النتائج ، التى يصل إليها باستخدام كل أسلوب من أساليب التفكير. فالنتيجة التى يصل التلميذ باستخدام التفكير الاستدلالى الذى يعتمد على المنطق تكون - بلا شك - درجة الثقه فيها أعلى من النتيجة ، التى يصل إليها باستخدام التفكير الاستقرائى مثلا.

(جـ) إدراك التلميذ للفرق بين القضايا مطلقة التعميم ، والقضايا محدودة التعميم.

(د) تأكد التلميذ من صحة القضايا التى يعتمد عليها فى تفكيره.

(هـ) مراجعة التلميذ للنتيجة التى وصل إليها فى ضوء القضايا المعطاة والقضايا الموثوق فى صحتها.

وخلاصة القول ، ينبغى أن يهدف تدريس الرياضيات تدريب التلاميذ على التفكير والإستنتاج بأنفسهم ، حتى يستطيعوا أن يزنوا الأمور التى تعرض عليهم الآن ، أو فى المستقبل، وأن يفكروا فى مختلف المشكلات السياسية، والاقتصادية، والاجتماعية، وأن يعطوا أحكاماً موضوعية فى هذا كله. ويجب أيضاً أن يتدربوا على البحث عن الحقائق وتحليل المواقف، وتكوين عادة الإمتناع عن إصدار أحكام إلا بعد أن تتوفر كافة الأدلة ، وبعد توفير المعلومات اللازمة.

٣ - تذوق الناحية الجمالية فى الرياضيات:

ان ما يميز الانسان عن غيره من سائر الكائنات الأخرى ، نزوعه الى الناحية الجمالية والاستمتاع بها، وممارستها كعامل منتج فيها ، أو عامل مستمتع بها. والتذوق السليم من الأشياء المهمة ، التى تدفع حياة الإنسان نحو الجمال والرقى ، وتدفعه لأن يرقى بإحساسه ، أى يهيئ جواً ممتعاً بهيجاً .

والناحية الجمالية فى الرياضيات ، تتمثل فى أشكالها ، وتكوين تلك الأشكال، واستخدامها فى الزخرفة ، وغيرها من مثيرات هذا التذوق . بل إن من أسمى مراتب التذوق ، الشعور بجمال الرياضيات ، وبتسلسلها ، ونتائجها ، وقواعدها العامة ، والصور الرمزية التى تقدم بها العلاقات ، وغير ذلك من النواحى المهمة ، التى يجب أن ينظر إليها الفرد بشئ من الفهم والتقدير، وعدم النظر إلى الرياضيات كعلوم جافة جامدة ، لا تخرج عن كونها مجرد تدريبات آليه مملة تدفع إلى السأم ، وتدعو للإعراض عنها. ولذلك فإن أهمية أسلوب التدريس تتضح فى إظهار ما فى الرياضيات من جمال ، وممارسة تذوقه ، والاستمتاع به. فمثلا ، مما يظهر للطلاب الجمال فى الرياضيات ، توضيح دورها الكبير فى التطور والسبق العلمى والتكنولوجى والاجتماعى الذى يعيش فيه العالم الآن، حتى أصبحت الرياضيات هى (لغة) العلوم الآن، وأصبحت حياتنا مبنية على الرياضيات. أيضاً ، يمكن تنمية حب الرياضيات ، وتقدير وتذوق الجمال فيها ، عن طريق معرفة التلميذ لدور الرياضيات فى النمو الحضارى ، إذ إنها تعد وسيلة فعالة لوصف الحياة من حولنا ، ولمعرفة النماذج الرياضية واستخدامها،

مثل التنبؤ بالأحداث والتخطيط. كذلك ، عن طريق إكتشاف التلميذ جمال الرياضيات الذاتى ، ومعرفة قوتها المتمثلة فى أنماطها وتركيباتها وتعميماتها وتوحيدها لأفرع مختلفة ، بما يجعله يحبها ويتذوق جمالها. وحتى يتحقق ذلك ، تقع على المدرس مسئولية مساعدة التلميذ فى التعرف على ما يلى:

(١) أهم جوانب تاريخ الفكر الرياضى ، لإبراز تاريخ وسير الرياضيين ، الذين أسهموا فى حضارة العالم وتقدمه.

(٢) بعض جوانب تفاعل الرياضيات مع التقدم المادى الذى يعشه العالم الآن.

(٣) بعض جوانب تطبيق الرياضيات فى بعض مظاهر الحياة من حولنا.

(٤) دور الرياضيات فى تطور العلوم الأخرى، وما بين الرياضيات وهذه العلوم من علاقات متداخلة متشابكة .

(٥) بعض جوانب اسهام الرياضيات فيما يعيشه العالم الآن من تقدم علمى وتكنولوجى .

٤ - تكوين بعض العادات والإتجاهات السليمة مثل : التسامح والتعاون والإعتماد على النفس وتطبيق التفكير العلمى:

يعرف (محمد عماد الدين اسماعيل) الإتجاه بأنه "مفهوم يعبر عن محصلة استجابات الفرد نحو موضوع ذى صبغه اجتماعية ، وذلك من حيث تأييد الفرد لهذا الموضوع أو معارضته له"(١)

ويعرف (محمود محمود عوف) الإتجاه بأنه "نزعه فعالة، ذات صبغة انفالعية ، وذات درجة ثبات، يكتسبها الفرد نتيجة لخبراته فى الحياة أثناء تفاعله مع بيئته، تجعله يواجه ظاهرة الحياة ومواقفها المختلفة، بما فيها من علاقات ومؤسسات ونظم ومشكلات، فيتصرف فيها تصرفاً يتميز بالتحرر من قيود السلطة

(١) محمد عماد الدين اسماعيل ، وآخرون ، كيف نربى أطفالنا التنشئة الاجتماعية للطفل فى الأسرة العربية ، القاهرة : دار النهضة العربية ، ١٩٦٧ ،ص ٤٧.

المعطلة للتفكير، وبالإنطلاق الفكرى الذى توجهه الملابسات والشواهد والأدلة الواقعية، أى التجريب»[1].

ونقصد بالإتجاه وجود حالة فكرية متأثره بالعاطفة فتوجه السلوك، وذلك وفقاً للأهداف الاجتماعية. ويهمنا هنا ، تكوين إتجاهات سليمة نحو الرياضيات ، ونحو التفكير السليم ، ونحو عدم التعصب والتحيز ، ونحو الرغبه فى التجريب، ونحو تمحيص ما يقرأ من آراء وأفكار ، ونحو القراءة الواعية فى الرياضيات ، وفى غيرها من المجالات الأخرى فى الحياة . وهذه جميعها تتطلب وقتاً ليس بالقصير، إذ إن تكوين الإتجاهات والميول والعادات يأتى على المدى الطويل ، وبشرط أن يكون للمدرس إتجاهات إيجابية نحو الرياضيات ، وأن يحرص على إكساب التلاميذ العادات والإتجاهات المرغوب فيها داخل الفصل وخارجه، وبعامة ، لا تتكون الاتجاهات وغيرها بالوعظ والإرشاد ، ولكنها تتكون بالفهم ، والتوجيه السليم، والإرشاد الصحيح ؛ والممارسة العملية والتجريب. ولاشك فى أن لشخصية المدرس ولطريقة تدريسه ، أثرهما الكبير فى تكوين هذه الإتجاهات والعادات . وذلك ما سنوضحه فيما يلى:

(أ) بالنسبة لإكتساب أو تكوين عادة الدقة فى التعبير :

يتطلب ذلك أن يلاحظ المدرس التلميذ ، ويوجهه عند كتابته للتعريفات ، أو منطوق النظريات ، أو عند الإجابة عن الأسئلة فى الرياضيات أو خارجها.

(ب) بالنسبة لحل المشكلات :

بالنسبة للمشكلات الرياضية العامة كإختراع أساليب لحلها ، أو خلق مشاكل أخرى، فهذه من نصيب العلماء والباحثين المتخصصين فى الرياضيات ، إذ تعد أساس تطور الرياضيات عبر تاريخها فى العصور المختلفه، وبالطبع ذلك خارج نطاق المطلوب من التلميذ، إذ يقتصر معنى حل المشكلات بالنسبة للتلميذ على الوصول إلى حل المسائل والتمارين العددية واللفظية والرمزية، وذلك يتطلب جهداً من المدرس حتى يستطيع خلق الدوافع التى عن طريقها يمكن تنمية قدرات التلميذ فى حل المشكلات . ويستطيع المدرس مساعدة التلميذ لتحقيق الهدف السابق ، عن طريق الخطوات الإجرائية التالية :

(١) محمود محمود عوف ، "دراسة تجريبية لانشاء مقياس للإتجاه العلمى" ، بحث غير منشور مقدم لكلية التربية ، جامعة عين شمس للحصول على درجة الماجستير ، ١٩٥٩ ، ص٥ .

- تحديد السؤال المطلوب إجابته فى المشكلة ، والمعلومات التى يمكن الإعتماد عليها فى المشكلة ، والتى وردت فى صياغتها.
- تحديد المعلومات الناقصة والتى يحتاجها حل المشكلة.
- تحديد ما قد تتضمنه المعلومات المعطاة عن المشكلة من معلومات ليست لها وظيفة .
- ترجمة المشكلة إلى علاقات أو أشكال رياضية، والإلمام بالمصطلحات والرموز اللازمة للحل.
- التمييز بين الإفتراضات والحقائق ، التى يمكن الاعتماد عليها فى الحل.
- صياغة الحل صياغة منطقية سليمة ، وتدعيم خطواته تدعيماً رياضياً سليماً
- مراجعة الحل والتأكد من صحته، كذا محاولة البحث عن أكثر من طريقة للحل.
- صياغة بعض المشكلات صياغة جيدة.
- الاستفاده من حل المشكلات السابقة ، فيما يواجهه التلميذ من مشكلات جديدة.
- إقتراح مشكلات من تأليف التلميذ ، أو تطوير المشكلة التى يقوم بحلها.

(جـ) بالنسبة لتكوين الإتجاهات السليمة :

يتطلب أيضا تكوين الإتجاهات السليمة وقتاً وجهداً من المدرس ، حتى يمكنه إكسابها للتلاميذ ، ومن الإتجاهات التى ينبغى أن يحرص المدرس على تكوينها خلال تدريسه للرياضيات ، نذكر ما يلى:

* اتجاهات خاصة بالرياضيات ، مثل :

- تكوين الثقة والولاء للرياضيات ، عن طريق :

● أن يكون المدرس القدوة الذى يقبله التلاميذ، حتى يقلدونه ويتمثلون به .

- أ ن يعمل المدرس مع تلاميذه بالصبر والرفق . حتى يلاقى كل تلميذ -مهما كانت قدراته- نجاحاً ما.
- أن يجعل المدرس العملية التعليمية ثواباً أكثر منها عقاباً .
- أن يكون المدرس عادلاً عند تقويم عمل التلاميذ.
- أن يعمل المدرس على حفظ النظام داخل الفصل.

- بناء إتجاه التفاؤل . عن طريق :

- أن يكون المدرس شخصاً متفائلاً ومتحمساً ومخلصاً .
- أن تقدم المسائل بطريقة لا تفزع التلميذ نفسياً وعقلياً .
- إعطاء واجبات وتحديات فى مستوى قدرات التلميذ . أو تتحداها قليلاً .
- تقديم وسائل وتوضحيات وتطبقات جديدة . مما يشد إنتباه التلاميذ . ويغير من رتابه سير العمل داخل الفصل.

- تكوين إتجاه السعادة والرضا فى دراسة الرياضيات . عن طريق:

- تقديم المادة بطريقة تُفهم وتثير إنتباه التلاميذ. وبذا يتكون لديهم حب الاستطلاع، فيتسابقون على معرفة الجديد والمزيد من الموضوعات الرياضية.
- استخدام الوسائل والمواد والطرق الختلفة . التى تتيح للتلميذ أن يكتشف، ويناقش، ويقوم بالتجريب والقياس.
- أن يشترك كل تلميذ حسب ميوله، ومستواه، واستعداداته فى عمل الوسائل، وكتابة وقراءه المقالات . والسير الذاتية وحل المسابقات.

*** اتجاهات عامة، مثل :**

- الأمانة .
- الشفقه .
- الإحترام .
- الإعتماد على النفس .
- التعاون وتقبل النقد .

وبالنسبة للإتجاهات الثلاثة الأولى، وهى: الأمانة، والشفقة، والإحترام، ينبغى أن يكون المدرس هو القدوة الحسنة فى ذلك، إذ ينبغى أن يكون أمينا فى عمله، شفوقا على التلميذ ، ويحترمه مهما كان مستواه الاجتماعى الاقتصادى ، أو مهما كانت قدراته الذهنية، وبذلك يكون المدرس النموذج الذى يتمثل به التلميذ ، ويحاول أن يقلده .

أما بالنسبة لإتجاه الاعتماد على النفس ، فإن ذلك يتطلب من المدرس مساعده التلميذ على تحقيق ما يلى:

- الحفظ على النظام داخل الفصل ، حتى ينصت التلميذ بإهتمام للمناقشات، التى تدور فى حجرة الدراسة.
- إبراز أهمية تسجيل التلميذ للأفكار الرئيسة ، التى تعرض فى الدرس ، دون توجيه أو معاونة من المدرس.
- توضيح أهمية إجادة التلميذ استخدام التعبيرات والرموز والأشكال الرياضية فى المناقشات التى تجرى داخل الفصل.
- التأكيد على أن فهم التلميذ لكل ما يقرأه أو يقوم بتلخيصه فى الرياضيات ضرورة لازمة لنموه العلمى.
- لفت نظر التلميذ إلى أهمية كتابة حلول منظمة ودقيقة للمسائل، وذلك دون إنتظار مساعدة خارجية.
- تعريف التلميذ بمصادر المعلومات ، التى يحتاج إليها من غير الكتب المدرسية، كذا تعريفه بطرق استخدام الكتب المدرسية استخداماً جيداً .
- مساعدة التلميذ على رسم خطة لتنظيم وقت الاستذكار.
- نصح التلميذ بعدم محاولة حل المسائل البالغة الصعوبه والتعقيد .

كذلك بالنسبه لإتجاه التعاون وتقبل النقد ، فان ذلك يتطلب من المدرس لفت إنتباه التمليذ إلى أهميه تحقيق مايلى:

- تبادل المعلومات مع غيره من التلاميذ ، والاستعداد دائما لمساعدة زميله ، فيما يحتاج إليه فى دراسة الرياضيات.

•• المحافظة على كتب وكراسات وأدوات زميله، وإعارة زميله الأدوات والأشياء التى لايحتاج إليها، إذا طلب منه ذلك .

• عدم مقاطعة زميله أثناء المناقشة، وتقبل النقد البناء من مدرس الرياضيات ومن زملائه.

• التطوع للعمل أثناء الدرس ، وفى أعمال جمعيات النشاط المدرسى ، مثل جمعية العلوم الرياضية.

٥ - اكتساب مهارات معينة :

ونعنى بالمهارة هنا ، القدرة على أداء العمل على مستوى عال من الإتقان ، عن طريق الفهم ، وبأقل جهد ، وفى أقل وقت ممكن. وهناك كثير من المهارات ، تهدف الرياضيات أن يكتسبها التلاميذ ، ومن هذه المهارات : المهاره فى إجراء العمليات الأصلية، والمهارة فى القياس، والمهارة فى استخدام الأدوات الهندسية، والمهارة فى ترجمة المشاكل والمواقف الرياضية إلى صور يمكن أن يسهل الحل باستخدامها.

ولكى يكتسب الإنسان المهارة ، يجب أن تتوفر فيه شروط أهمها ما يأتى :

(أ) أن يكون واعياً بأهمية المهارة التى يستخدمها ، وبقيمتها ، وأثرها فى حياته العلمية والعملية.

(ب) أن يمارس المهارة فعلاً فى موقف طبيعى مرتبط بالحياة أو بموقف يهمه.

وحتى يستطيع التلميذ إكتساب المهارة فى إستيعاب ما يدرسه من رياضيات ، ينبغى أن يساعده المدرس فى تحقيق ما يلى:

- الحصول على الإجابة الصحيحة فى أقل وقت ممكن، عند القيام بعملية رياضية.
- استخدام طرق مختصرة فى إجراء العمليات.
- تكوين فكرة عن الجواب الصحيح ، سواء عن طريق التقدير التقريبى أم عن طريق الحدس.

- تمثيل العلاقات بالأشكال الهندسية أو الوسائل التعليمية، كلما أمكن تحقيق ذلك.

- استنتاج علاقات جديدة، وتوظيف الخبرات السابقة فى المواقف الجديدة.

٦ - توجيه الميول وتكوين الصالح منها :

الميل هو الإهتمام الذى يدفع الفرد للقيام بعمل أو نشاط معين، والميول تتأثر باستعداد الفرد وبالعوامل البيئية والثقافية ، التى يعيش فيها. والميول توجه دائماً نحو شئ ما، كالميل نحو العلوم أو الرياضيات أو الفنون، أو غير ذلك. لذا ، ينبغى على المدرس دراسة التلاميذ لإكتشاف ميولهم ، وتوجيهها ، وتعبئتها فى توجيه التعليم، والمدرس مسئول عن نمو الميول المرغوب فيها ، وتكوين ميول جديدة ، وتعميق القديم منها.

ويمكن التعرف على ميول التلاميذ بملاحظتهم عند القيام بنشاطهم ، أو فى تعبيرهم عن رغباتهم. ولا شك فى أن تكرار خبرة سارة يثبت السلوك المصاحب لها. وحتى تكون دراسة الرياضيات ممتعة ولطيفة ، وتخلق عند التلميذ ميولاً إيجابية نحوها بخاصة ، ونحو العلم بعامة ، ينبغى أن يكون النشاط المتصل بها متعدداً ومتنوعاً ليجد كل تلميذ فيه ميولاً جديدة.

ويستطيع المدرس مساعدة التلميذ فى تكوين ميول نحو الرياضيات، عن طريق:

- تشجيع القراءة عن الرياضيات والرياضيين.
- تقديم أكثر من حل للمسأله الواحدة، بطرق جديدة متنوعة .
- تفسير بعض الظواهر والمواقف الاجتماعية تفسيراً رياضياً .
- تشجيع الاستفهام عن كل جديد من الأفكار الرياضية.
- إبراز تطبيقات الرياضيات فى مختلف مجالات وميادين الحياة.
- التعريف بأثر الرياضيات فى تطور الفكر البشرى عبر التاريخ.
- تكليف كل تلميذ بأعمال وانشطة تتناسب وقدراته.

الفصل الثالث

أساليب الإقناع والاستقراء الرياضى

* أساليب الإقنـــاع .
* الاستقراء الرياضى :
  - مفهوم الاستقراء وأهميته .
  - لماذا ينبغى استخدام الاستقراء فى الرياضيات استخداماً صحيحاً ؟
  - استخدام الاستقراء فى الرياضيات .
  - الدور التعليمى للاستقراء .
  - أخطاء الاستقراء .

أساليب الاقناع

يلزم الفرد كى يعيش فى مجتمع عصرى متحضر. أن يقنع الآخرين بصحة أقواله، أو بما يقوم به من أعمال. وفى سبيل تحقيق ذلك، يدعم وجهة نظره بإعطاء الأسباب؛ وتقديم شواهد الإقناع مستخدماً فى ذلك خبرته الشخصية، أو شواهد موضوعية؛ أو بيانات محددة.

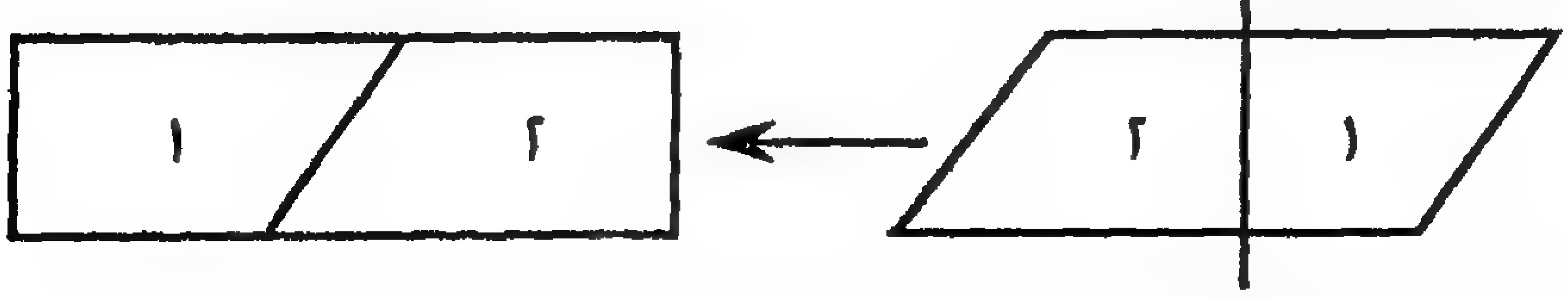
ويحتاج معلم الرياضيات دوماً إلى طرق وأساليب بعينها. لاقناع تلاميذه بصحة ما يعطيه من نظريات وتمارين. وذلك فى جميع مراحل التعليم.

وفى المراحل الأولى للتعليم، تتنوع الأساليب التى تستخدم للتدليل على صحة قضية رياضية. وهذه الأساليب تكون فى جوهرها طرقاً للإقناع وليست برهاناً بالمعنى الرياضى. ومن أهمها ما يلى:

١ - الإقناع البصرى[١]:

يعتمد الطفل كثيراً على التدليل البصرى فى الإقناع بكثير من الحقائق والعلاقات الرياضية؛ وكأن شعاره "أنا أرى فأنا أصدق". فنجد مثلاً أن المعلم يقدم للتلميذ ٣ بليات، ثم ٤ بليات ليضمها معا فى مجموعة واحدة، ويرى أنه قد تكون منهما ٧ بليات، وبذلك يقتنع بأن ٣+٤=٧. كذلك، نرى فى مواقف أخرى أن الدليل البصرى يساعد على إعادة تنظيم شكل ما بطريقة تقنع التلميذ بصحة علاقة معينة؛ كما هو الحال عند إقتناعه بأن: مساحة متوازى الأضلاع = القاعدة × الإرتفاع.

عن طريق إعادة تشكيل متوازي الأضلاع ليصبح مستطيلاً. كما يوضح ذلك الشكلان التاليان:



(١) وليم عبيد: مذكرة في تدريس الرياضيات. كلية التربية، جامعة المنيا. ١٩٧٨، ص ١٨ - ١٩.

وكما : فى حالة إعادة تشكيل شبه المنحرف ليصبح مثلثا ، كما يبين ذلك الشكلان التاليان :

٢ - الطرق العملية :

ويعتمد الإقناع فى هذه الطرق على كثير من الحواس ، إذ أنها تتضمن إستخدام الأدوات الهندسية ، والقياس ، وجمع البيانات ، وذلك كما فى حالة الإقناع بكثير من خواص الهندسة الإقليدية .

مثال :

إرسم مثلثاً أ ب جـ ، أوجد بالمنقلة قياس كل من زواياه ، ثم أوجد مجموع قياسات الزوايا الثلاثة .

الشواهد :

مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب جـ يساوى ١٨٠° ، وهذا صحيح لكل المثلثات التى يرسمها تلاميذ الفصل .

النتيجة :

مجموع زوايا أى مثلث = ١٨٠° .

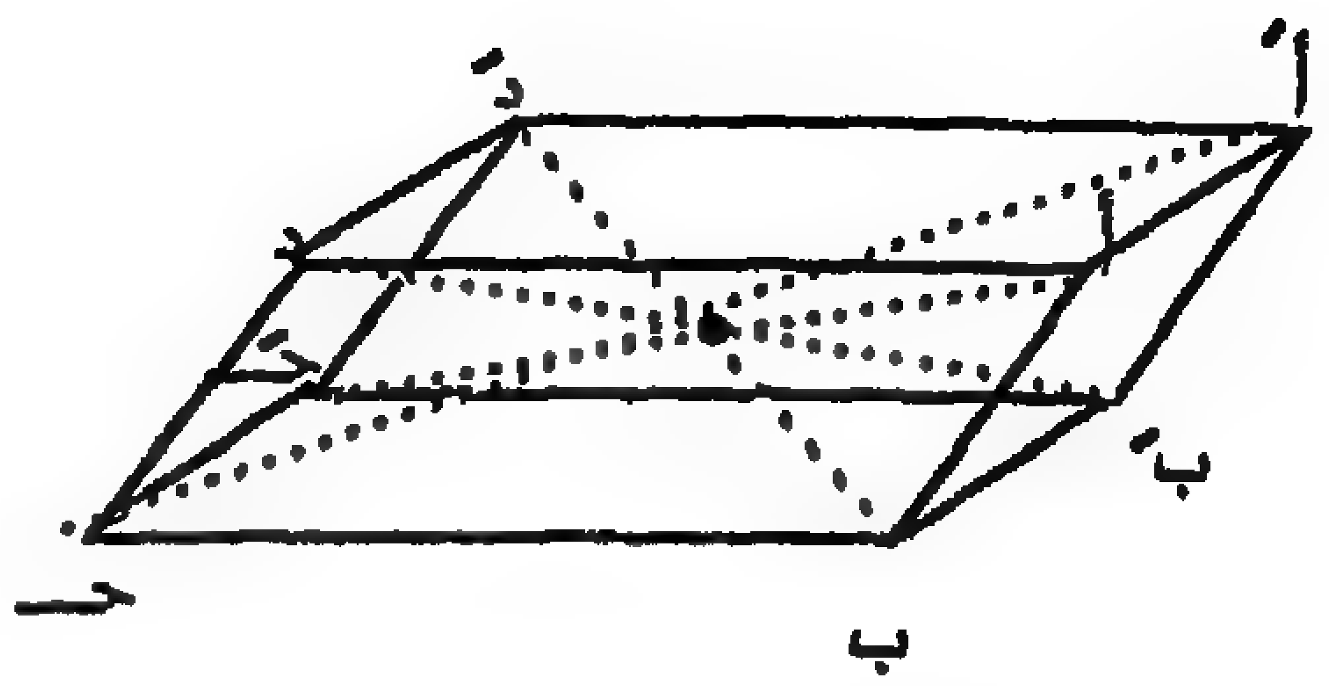
٣ - القياس والتعميم : Analogy & Generalzation

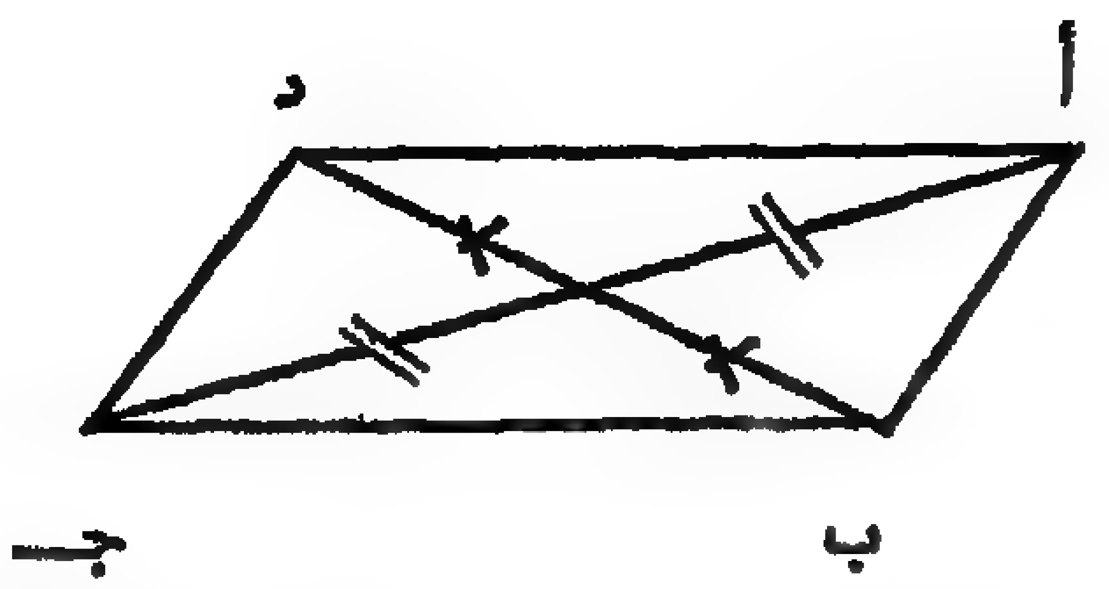
أولاً : القياس :

كثيراً ما يلجأ المعلم إلى القياس على صحة قضية سابقة للإقناع بصحة قضية جديدة ، وذلك كما فى حالة الإقناع بصحة بعض خواص الهندسة المجسمة (الفراغية) قياساً على صحة نظائرها فى الهندسة المستوية(١) .

(١) وليم عبيد . "مفهوم البرهان بين الاقناع والمنطق". الخوارزمي مجلة العلوم الرياضية (جامعة طرابلس) ، السنة الثانية ، العدد الثالث ، مارس ١٩٧٤ ، ص ص ١٣ - ٢٠ .

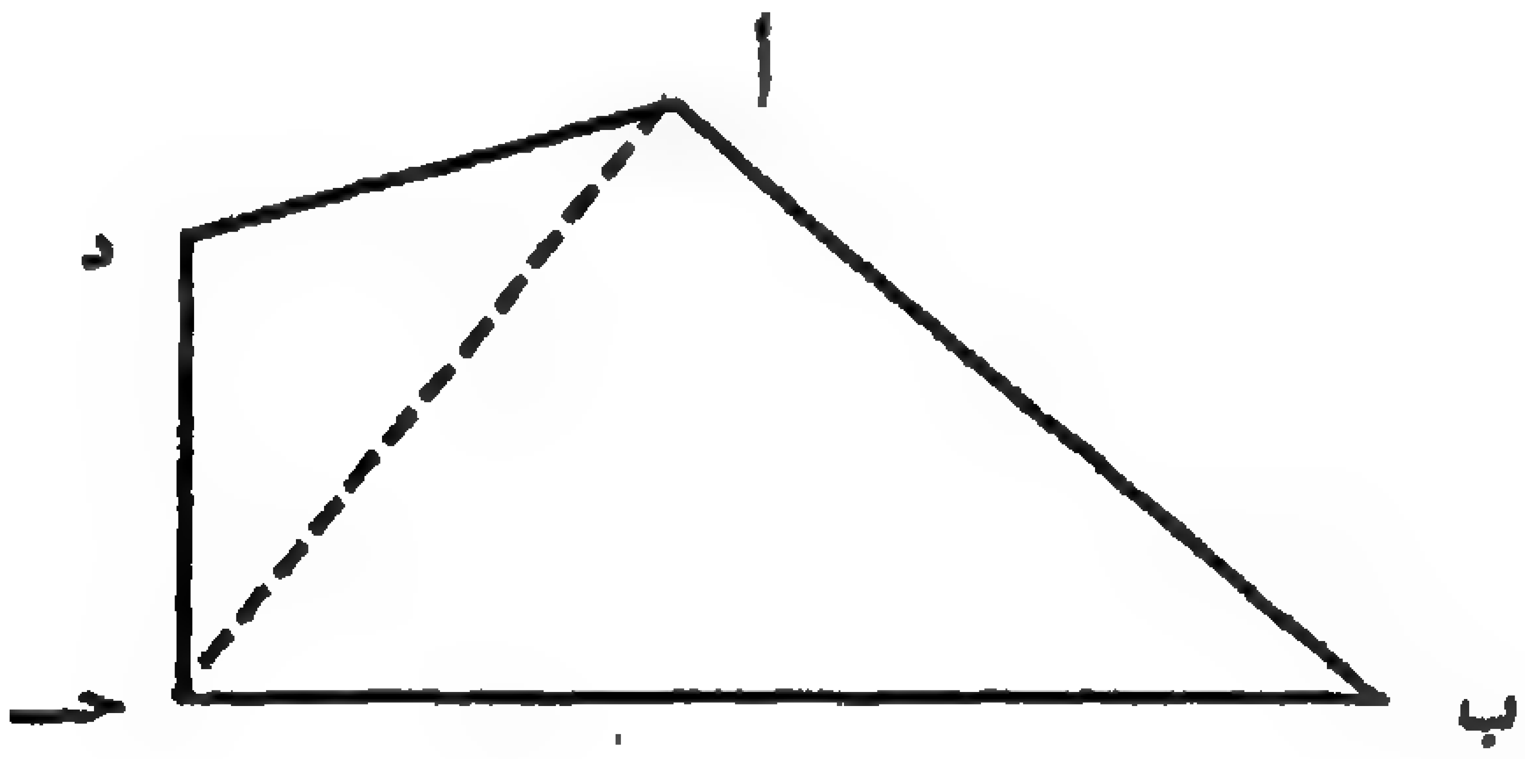
فعلى سبيل المثال ، يعتمد إثبات أن أقطار متوازى السطوح ينصف كل منها الآخر فى نقطة تقاطعها ، على الخاصية المناظرة لقطري متوازي الأضلاع .





أيضاً ، كما فى حالة الإقناع بصحة بعض خواص الهندسة المستوية قياساً علي إثبابات ثبتت صحتها فى الهندسة المستوية .

فعلى سبيل المثال ، يمكن إثبات أن مجموع الزوايا الداخلية للشكل الرباعى = ٣٦٠° (إعتمادا على صحة النتيجة التى مفادها أن مجموع زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠°) ، لأن كل شكل رباعى يمكن تقسيمه إلي مثلثين ، كما بالشكل التالى :



ثانياً : التعميم :

لتوضيح ما نعنيه بالتعميم ؛ نقول "الطول بمفهومه العددى وليس بمفهومه الهندسى يقودنا إلى تركيب بنائى للرياضيات يتجه بنا نحو تركيب يزداد تدريجياً . فمن الأعداد الحقيقية فالأعداد المركبة ، ومن الجمع والضرب إلى التفاضل والتكامل ، وهكذا نمضى فى السير إلي الرياضيات العليا"[1] .

(1) Russell B, Introduction of Mathematical Philosophy, London : George Allen & Unwin 1924, p.1.

معنى هذا الوصول من الجزئيات الشكلية الخاصة إلى العموميات . وخلاصة القول ، إن العملية المألوفة التى يسميها الرياضيون (التعميم) هى استنتاج يمكن مقارنته (بالاستنتاج) الذى هو أساس العلوم الفيزيقية[1] .

وبمعني آخر. تكون صحة الاستنتاجات الرياضية لها نفس طبيعة تعميمات التجارب في العلوم المعملية .

وعليه ، فإن المعلم يمكنه أن يقنع تلاميده أحياناً بصحة علاقة ما عن طريق تعميم علاقة مماثلة أقل عمومية من العلاقة الجديدة ، وذلك كما فى حالة الإقناع بصحة قوانين الأسس لأى أس ، قياساً علي أو تعميماً لصحتها فى حالة الأسس الصحيحة الموجبة ، وكما فى حالة الإقناع بصحة قانون حل معادلات الدرجة الثانية عندما تكون العوامل أعداداً مركبة ، قياساً علي صحته فى حالة العوامل الحقيقية[2] .

وقد تستخدم أحياناً فى المرحلتين : الإعدادية والثانوية بعض طرق الاقناع التي تتسم فى هذه الحالة بدرجة أعمق من النضج الفكرى ، وذلك مثل :

١ - الحصر البسيط : ويتمثل فى دراسة عدد معقول من الحالات الخاصة .

٢ - القياس التناظرى : ويتمثل فى مطابقة موقف جديد بموقف سابق ثبت صحته .

٣ - قبول قضية ما قياساً على صحة قضية أخري مشابهة .

٤ - توسيع نمط فكرة معينة : ويتمثل فى قبول صحة قضية ما ، كإمتداد لقضية أخرى ثبتت صحتها .

---

(١) ناثان أ. كورت ،ترجمة عبد الحميد لطفي : الرياضيات فى اللهو والجد ، دار نهضة مصر، القاهرة ، ١٩٦٥ .
(٢) د. وليم عبيد : "مفهوم البرهان بين الاقناع والمنطق" ،مرجع سابق ص ١٤ .

الاستقراء الرياضي

مفهوم الاستقراء وأهميته :

يفهم الاستقراء على أنه منهج يتأدى بواسطة قواعد يمكن تطبيقها ميكانيكاً من واقع الملاحظة لمبادئ عامة موافقة . فى هذه الحالة تزودنا قواعد الاستدلال الاستقرائى بقوانين إيجابية للكشف العلمى[1] . ورغم أن الاستقراء هو منهج دراسة الظواهر الطبيعية المختلفة ، فإنه وجد رضاً وحاز قبولاً من عديد من الرياضيين ، وعلي رأسهم (جون ستيورات مل) الذى "زعم أن الحقائق الرياضية ليست فى حقيقتها سوى تعميمات تجريبية متينة الأساس"[2] . وقد أيد الاجتماعى الفرنسى الشهير (إميل دوركهايم) ما ذهب إليه (مل) بقوله أن "التجربة هى مصدر معرفتنا الهندسية"[3]. كما قال (دافيد هلبرت) بشأن هذا الموضوع فى خطابه أمام مؤتمر الطبيعيين "الهندسة هي حقيقة مجرد هذا الجزء من الفيزيقيا الذي يصف العلاقات بين أوضاع الأجسام الصلبة بعضها بالبعض الآخر فى عالم الأشياء الحقيقية"[4] .

ومن الأمثلة المفيدة التى تبين أهمية الاستقراء فى الكشف العلمى وفى وضع أسس وأصول بعض القوانين فى الرياضيات ، نذكر المثالين التاليين :

١ - درس (هالى) الفلكى البريطاني مسار ٢٤ مذنباً ولاحظ فى ٢١ حالة منها إختلاف المسارات بدرجة ملحوظة . ولكنه لاحظ فى المسارت الثلاث الأخري تشابها واضحاً ، مما أثار عنده تخميناً بأن تكون الثلاث مسارات تمثل مسار مذنب واحد تكرر دورانه حول الأرض ، وليس ثلاث مذنبات مختلفة ، يذهب الواحد فيها ويأتى غيره.

---

(1) Carl G. Hempel, Philosophy of Natural Selence, Prentice Hall, INC., London : Engelwoold Cliffs, , 1966, p. 10.

(٢) فؤاد كامل وآخرون ، الموسوعة الفلسفية المختصرة ،القاهرة : مكتبة الأنجلو المصرية ، ١٩٦٥ ، ص ١٧٢ .

(٣) ناثان أ. كورت ، مرجع سابق ،ص ٢٥.

(٤) المرجع نفسه ، ص١٩ .

وقد استخدم (هالى) خبرته الفلكية فى التحقق من هذا الافتراض ، فوجد أن المسار قطع (ناقص) ، وأن الفترات الزمنية بين ظهور هذا المذنب كانت متساوية تقريباً . وقد أوضحت التقاير الفكلية أنه ظهر فى أعوام ١٥٣١ ، ١٦٠٧ ، ١٦٨٢ ، أي فى فترات تقرب بين ٧٦،٧٥ سنة ، ومن هذه الحالات الثلاث تنبأ بأنه سوف يظهر عام ١٧٥٨ أو عام ١٧٥٩ . وبعد وفاة (هالى) بعدة أعوام عاد المذنب للظهور فى مارس ١٧٥٩ ثم كرر عودته فى أعوام ١٨٣٥ ، ١٩١٠ ، ١٩٨٦ .

والسمة البارزة فى هذا النوع من الاستقراء ، أنه قاد إلى كشف وتوليد بيانات جديدة من البيانات المعطاة ، لها صورة التنبؤ ، بمعنى ؛ أنه توليد خارجى يشبه التنبؤات التى تحدث لعدد السكان فى بلد ما أو في العالم ، قياساً على ماحدث في معدلات الزيادة فى سنوات سابقة وكل هذه التنبؤات ، هي استنتاجات محتملة قد تكون درجة احتمالاتها صغيرة أو كبيرة ، ولكنها كسمة مؤكده .

٢ - كان (جاليليو) يحاول تحديد ما إذا كان جسم حر ساقط يتبع قانوناً ما يمكن للإنسان فهمه بسهولة . ولم يكن لديه الأدوات والأجهزة التي تساعده على قياس ذلك مباشرة ، فوجد صعوبة فى إجراء تجاربه ، لذلك هاجم المشكلة بأسلوب استقرائى ، ليحصل على نمط يستوحى منه البيانات الناقصة ، فإستخدام مستوى مائلاً ، وإعتبر أن السقوط الرأسى هو حالة من الحركة على مستوى مائل بزاوية قائمة ، فلاحظ فى تجاربه أن الكرة عندما تتدحرج على مستوى مائل لأسفل ، فإن سرعتها تزداد ، أي يكون لها عجلة موجبة ، وعندما تتدحرج على المستوى لأعلى ، فإن سرعتها تتناقص ، أى يكون لها عجلة سالبة . وأدى ذلك إلي أن يتساءل عن الوضع فيما يتعلق بالحركة علي مستوى أفقى ، وانتهى (جاليليو) باستنتاج أن الحركة على مستوى أفقى تكون بعجلة صفرية ، أي بسرعة ثابتة . هذا طبعا بإفتراض عدم وجود مؤثرات خارجية .

أن ما قام به (جاليليو) هو أيضاً استقراء عن طريق المحافظة على نمط أو صيغة فكرية معينة نتجت عن طريق البيانات ، التى جمعها بالمشاهدة ، وإن كان ما وصل إليه لم يكن بياناً مشاهداً ولكنه مستنتجاً .

لماذا ينبغى استخدام الاستقراء فى الرياضيات استخداماً صحيحاً ؟

أوضحنا فيما سبق أن الانتقال من المقولات الخاصة إلى المقولات العامة يسمى بالاستقراء ، ويستخدم الاستقراء فى الرياضيات على نطاق واسع ، إلا أنه يجب معرفة طريقة استخدامه استخداماً صحيحاً ، وإلا حصلنا على استنتاجات غير صحيحة ، وذلك كما الأمثلة التالية[1] :

مثال (١) :

إذا عوضنا عن قيم (س) في ثلاثية الحدود : $س^٢ + س + ٤١$ بالصفر ، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ على الترتيب نحصل على القيم المناظرة التالية : ٤١، ٤٧، ٥٣، ٦١، ٧١، ٨٣، ٩٧، ١١٣، ١٣١، ١٥١، أى نحصل على عدد أولى فى كل مرة . وعلى هذا الأساس ، نقر بأننا عند التعويض فى ثلاثية الحدود المعنية عن (س) بأى عدد صحيح غير سالب ، نحصل دائماً على عدد أولى .

والنتيجة السابقة التى وصلنا إليها عن طريق الاستقراء أيضاً غير صحيحة، لأن التعميم يفشل عند التعويض عن س بالقيمة ٤١ ، لأننا نحصل على عدد غير أولى .

مثال (٢) :

عند تحليل ثنائية الحدود $س^ن - ١$ (حيث ن عدد طبيعى) لكثير من القيم الخاصة للعدد (ن) ، نلاحظ أن جميع معاملات التحليل لا تفوق بقيمتها المطلقة الواحد الصحيح بالفعل ، وذلك كما يلى :

$$س - ١ = س - ١$$

$$س^٢ - ١ = (س - ١)(س + ١)$$

$$س^٣ - ١ = (س - ١)(س^٢ + س + ١)$$

(١) أ. سومينسكى وآخرون ، ترجمة أحمد صادق القرمانى ، الاستقراء الرياضى ، موسكو : دار مير للطباعة والنشر، ١٩٨٠ .

$$س^{٤} - ١ = (س-١)(س+١)(س^{٢}+١)$$

$$س^{٥} - ١ = (س - ١)(س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س + ١)$$

$$س^{٦} - ١ = (س - ١)(س + ١)(س^{٢} + س + ١)(س^{٢} - س + ١)$$

وتم وضع جداول كانت للمعاملات فى حدودها هذه الخاصية . غير أن محاولات إثبات هذه لأى (ن) لم تنل النجاح .

وفى عام ١٩٣٨ . دعا "ن . تشيبو تاريوف" إلى بحث هذه المسألة . وقد حل "ف. إيفانوف" هذه المسألة . فاتضح أن هذه الخاصية تكون لجميع ثنائيات الحدود $س^{ن}-١$ التي درجاتها أقل من ١٠٥ . وأحد عوامل $(س^{١٠٥}-١)$ هو كثيرة الحدود التالية :

$$(س^{٤٨} + س^{٤٧} + س^{٤٦} - س^{٤٣} - س^{٤٢} - ٢س^{٤١} - س^{٤٠} + س^{٣٦} + س^{٣٥} + س^{٣٤}$$
$$+ س^{٣٣} + س^{٣٢} + س^{٣١} - س^{٢٨} - س^{٢٦} - س^{٢٤} - س^{٢٢} - س^{١٥} + س^{١٧} + س^{١٦} +$$
$$س^{١٥} + س^{١٤} + س^{١٣} + س^{١٢} - س^{٩} - س^{٨} - ٢س^{٧} - س^{٦} - س^{٥} + س^{٢} + س + ١).$$

ليست له هذه الخاصية المذكورة .

مثال (٣) :

افترض "ب . فيرما" فى القرن السابع أن جميع الأعداد التى على الصورة $(٢)^{٢^{ن}} + ١$ تكون أعداداً أولية . وذلك على أساس أن التعويض عن ن بالقيم ٠، ١، ٢، ٣، ٤ يعطى الأعداد ٣، ٥، ١٧، ٢٥٧، ٦٥٥٣٧ على الترتيب . ولكن وجد "ل. اويلر" فى القرن الثامن عشر أن العدد $(٢)^{٢^{٥}} + ١$ عدداً غير أولى .

مثال (٤) :

أثبت "جـ ليبنتز" أن العدد $(ن^{٣}-ن)$ يقبل القسمة على (٣) والعدد $(ن^{٥}-ن)$ يقبل القسمة على (٥) والعدد $(ن^{٧}-ن)$ يقبل القسمة على (٧) حيث (ن) أى عدد صحيح موجب . لذا ، كان مزمعا لإفتراض أن العدد $(ن^{م}-ن)$ يقبل القسمة على م حيث (م) أى عدد فردى ، (ن) أى عدد طبيعى ، إلا أنه لاحظ بنفسه أن $(٢^{٩}-٢) = ٥١٠$. والعدد ٥١٠ لا يقبل القسمة على ٩ .

مثال (٥) :

أكد التعويض المباشر لجميع الأعداد الأولية الأقل من الألف أن لجميع الأعداد الأولية (م) لا يقبل العدد ($٢^{م-١}$ – ١) القسمة على $م^٢$. ولكن تم بعد ذلك إثبات أن ($٢^{١٠٩٢}$ – ١) يقبل القسمة على $(١٠٩٣)^٢$ حيث ١٠٩٣ عدد أولى .

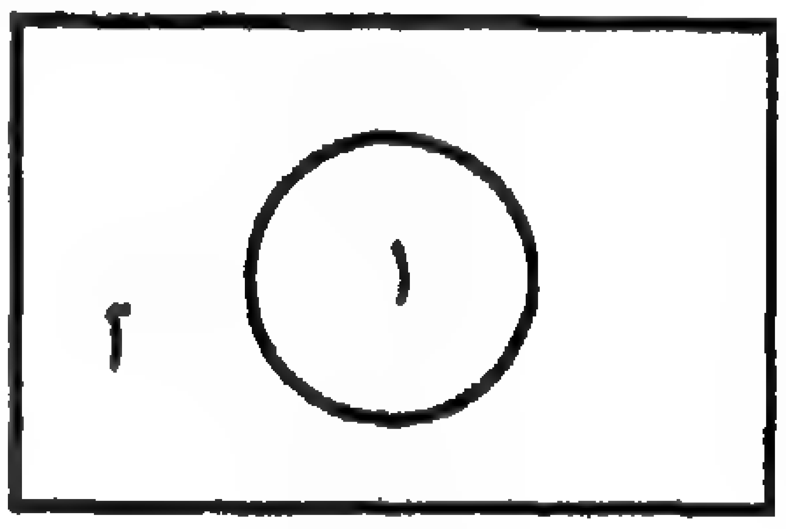
مثال (٦) :

نحاول – هنا – إيجاد عدد الأجزاء التى يمكن أن ينقسم إليها المستوى بعدد (ن) من الدوائر .

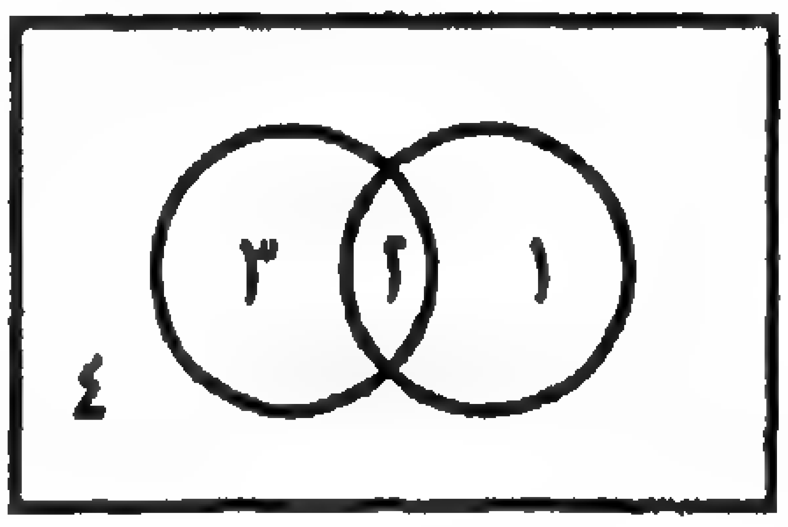
عندما ن = ١ ، يكون هذا العدد مساوياً إثنين ، كما فى ش (١) .

عندما ن = ٢ ، يكون هذا العدد مساوياً أربعة ، كما فى ش (٢) .

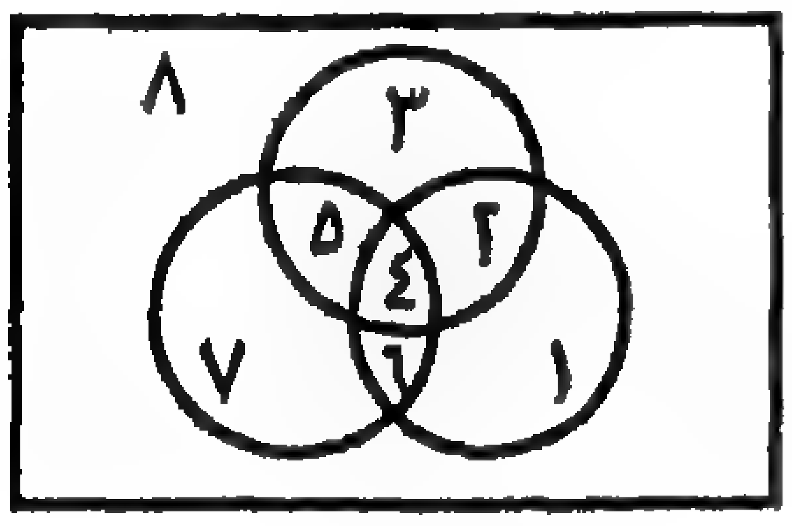
عندما ن = ٣ ، يكون هذا العدد مساويا ثمانية ، كما فى ش (٣) .



ش(١)



ش (٢)



ش (٣)

فى ضوء ما سبق ، كان المتوقع رسم دائرة تقسم كل جزء من تلك الأجزاء التى سبق الحصول عليها إلى جزئين . وفى هذه الحالة يتضاعف عدد الأجزاء بإضافه دائرة جديدة . ويكون عدد الأجزاء التى يمكن تقسيم المستوى إليها بواسطة أربع دوائر مساويا ١٦ جزءاً ، ولكن ذلك لا يتحقق ، إذ إن أكبر عدد من الأجزاء التى يمكن تقسم المستوى إليها بواسطة أربع دوائر يساوى ١٤ جزءاً فقط .

مثال (٧) :

من الخطأ أن نقول أن نتيجة التعويض عن ن بالقيم ١، ٢، ٣، .. فى الصيغة ($٩٩١ن^٢$ + ١) لن يكون مربعاً كاملاً ، لأنه توجد بالفعل مربعات بين الأعداد علي

الصيغة السابقة . غير أن أصغر قيمة للعدد (ن) الذى يكون عنده العدد ٩٩١ن٢ + ١ مربعاً كاملاً يكون كبيراً للغاية . وهذا العدد ، هو :

ن = ٧٦٧ و٥٣٨ و٤٢٢ و٤٤٧ و٣٥٩ و٣٣١ و٧٩٠ و٧٣٥ و١٢٠٥٥

مثال (٨) :

إذا ما دققنا التفكير فى بعض خواص النقطة ، والقطعة المستقيمة ، والمربع والمكعب ، فإننا نلاحظ نمطاً يقع فيما يلي :

(أ) النقطة شكل لها صفر من الأبعاد ، والقطعة المستقيمة لها بعد واحد، والمربع له بعدان ، والمكعب له ثلاثة أبعاد .

(ب) القطعة المستقيمة محددة بنقطتين أى بأشكال بعدها صفر ، والمربع محدود بقطع مستقيمة أي بأشكال لهلا بعد واحد ، والمكعب محدود بأوجه مربعة أى بأشكال لها بعدان . وإذا أردنا المحافظة على هذا النمط وتوسيع تفكيرنا فى هذا الصدد إلى ما بعد البيانات المذكورة سابقاً ، فإنه يمكن أن نفترض أن كل شكل له (ن) بعداً يكون محاطاً بأشكال ذات (ن - ١) بعد . ومن ثم فإن المكعب الزائد ، ذى الأربعة أبعاد ، يمكن تصوره بأنه شكل محدد بأشكال ثلاثية البعد ، وإفتراض أنه محدود بثمانية مكعبات ، ٢٤ وجها ، ٣٢ حافة ، ١٦ راساً .

مثال (٩) :

كثيراً ما نميل إلى التعميم قياساً على ظاهره معينة . ولكن ينبغى الأخذ فى الاعتبار أن التعميمات تؤخذ على أنها محتملة . إذ أننا قد نصل إلى تعميمات خاطئة . مثال ذلك فى الهندسة المستوية هناك عدداً لا نهائياً من المضلعات المنتظمة (أضلاعها متساوية وزواياها متساوية) . وإذا ما أردنا أن نضع فرضاً بالنسبة للهندسة الفراغية قياساً على هذه الظاهرة فى الهندسة المستوية ، فقد نقول أنه يوجد عدد لا نهائى من المجسمات الحدبة المنتظمة . إن هذا الإفتراض خاطئ تماماً ، إذ لا يوجد سوي خمس وخمس فقط مجسمات

محدبة منتظمة ، هى : الهرم الرباعى المنتظم ، الجسم السداسى المنتظم ، الجسم الثماني المنتظم ، الجسم الأثني عشر المنتظم ، الجسم العشرينى المنتظم .

مثال (١٠) :

وحتي لا نعمم بصفة عامة الملاحظات ، التي نصل إليها عن طريق الاستقراء ، نورد المثال التالى :

من المعلوم أن مجموع الزوايا الداخلة للمضلع (فى المستوى) يزداد بإزدياد عدد أضلاع المضلع (يساوى ٢ ن – ٤ من القوائم حيث ن عدد الأضلاع) . هذه الخاصية صحيحة ، وربما توحى لنا بإفتراض آخر مماثل خاص بمجموع الزوايا الخارجية ، أى إفتراض أن مجموع الزوايا الخارجية تزداد بإزدياد عدد أضلاعه . ولكن ، من الخواص الهندسية الإقليدية ، نعلم أن مجموع الزوايا الخارجية لأى مضلع ثابت ، وهو يساوي أربع قوائم .

استخدام الإستقراء فى الرياضيات :

يستخدم الاستقراء لإكتشاف العلاقات أو التعميمات المحتملة . إلا أن هذه الاكتشافات لا تصبح صحيحة ، بحيث يمكن أن نقول عنها أنها : حقيقة ، أو نظرية ، أو قانون ، مالم يتم إثبات صحتها بالطرق الاستدلالية .

وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح إستخدام الاستقراء فى بعض فروع الرياضيات :

١ – عند عرض المشكلة التالية على التلاميذ فى الفصل .

" هل توجد علاقة بين الأعداد الزوجية والأعداد الأولية ؟"

يستطيع التلاميذ – بسهولة – استنتاج أن العدد الزوجي يساوى مجموع عددين أولين ؛ وذلك مثل : ٦ = ٣ + ٣، ٨ = ٣ + ٥ ، ١٠ = ٣ + ٧؛ ١٢ = ٥ + ٧ وهكذا .

هل ما سبق صحيح دائما ؟

الإجابة عن السؤال السابق : نعم ، لأن ذلك يتحقق دائماً في كل محاولة ، فمثلاً ١٠٠ = ٤١ + ٥٩ ، وهكذا .

وقد وضع "جولد باخ" - منذ حوالى قرنين - فرضاً يعبر عن هذه الظاهرة ينص على : أى عدد زوجى أكبر من ٤ يساوى مجموع عددين أولين كل منهما يكون أكبر من ٢ . ورغم أن هذا المثال مازال استنتاجاً استقرائياً ، لم يرق إلى مرتبة النظرية ، لأنه لم يبرهن بطريقة استدلالية ، فإنه لم يظهر بعد مثال يدحضه .

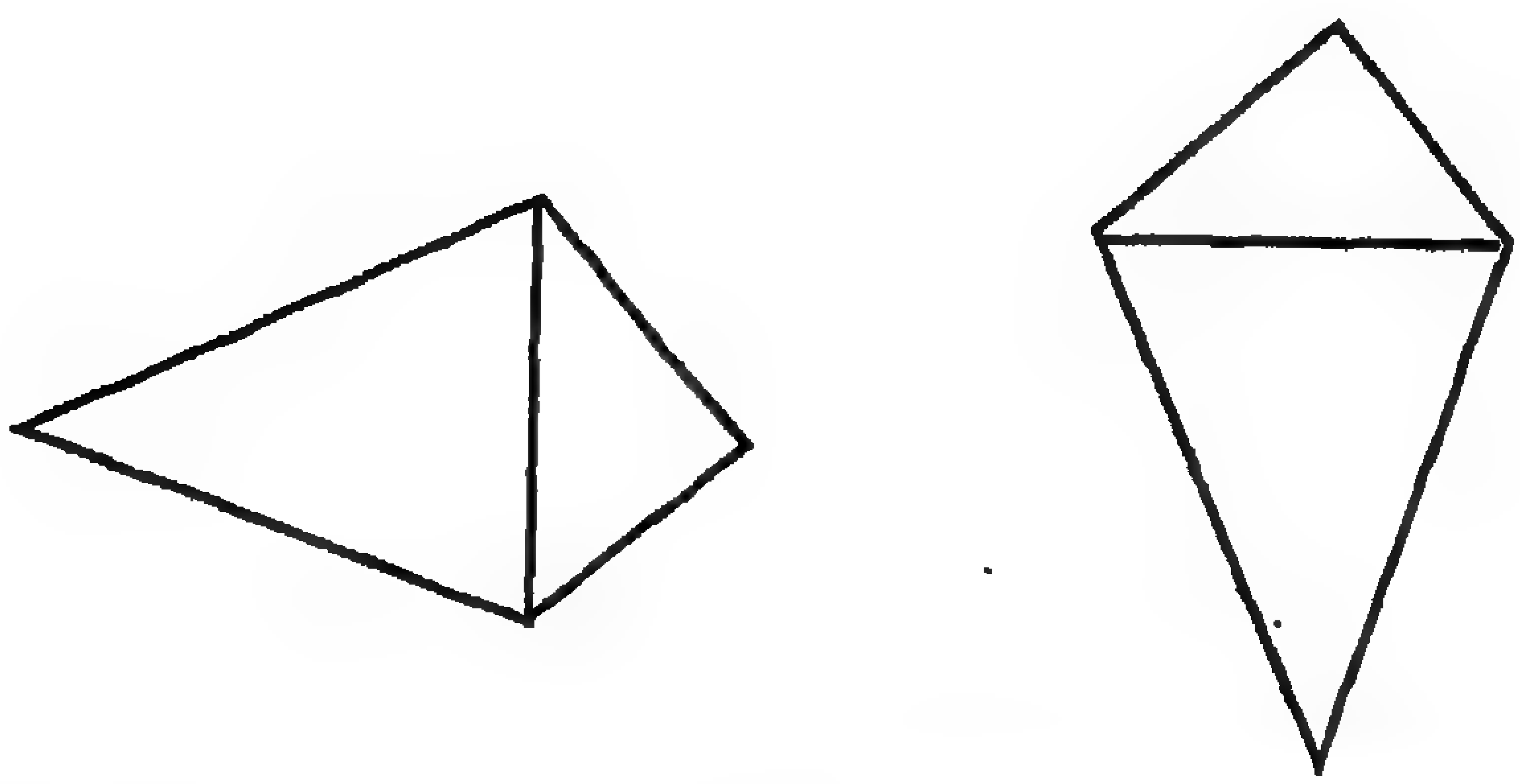
٢ - يستطيع التلميذ استنتاج الحل الصحيح للمعادلة التى على الصورة أ س + ب = صفر عن طريق التخمين ، وذلك بالتعويض عن قيمة س بقيم عددية إلي أن يصل إلى العدد الذى يحقق المعادلة .

فمثلاً ، فى حالة المعادلة ٣ س - ٧ = س + ١

يستطيع التلميذ بسهولة استنتاج أن س = ٤ تحقق المعادلة ، لأنه عند التعويض عن قيم س بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، على الترتيب يكون الطرفان غير متساويان فى كل حالة ، بينما عند التعويض عن س = ٤ ، يكون الطرفان متساويان .

٣ - لإيجاد عدد المثلثات التى يمكن الحصول عليها من تقسيم المضلع ذى (ن) ضلعاً بأقطاره غير المتقاطعة : نتبع الآتى :

للمثلث يكون هذا العدد مساوياً للواحد الصحيح ، إذ لايمكن مد أى قطر فى المثلث ، والشكل الرباعى يكون هذا العدد مساوياً ٢ ، كما هو واضح بالشكل :



نفرض أننا نعلم أن كل مضلع ذى م ضلعا (حيث م < ن) يقسم إلى م - ٢ مثلث بأقطاره غير المتقاطعة (دون الإعتماد على طريقة التقسيم) .

ندرس أحد تقسيمات المضلع ذى ن ضلعا أ$_1$ أ$_2$ .... أ$_ن$ إلى مثلثات

نفرض أن أ$_1$ أ$_م$ أحد أقطار هذا التقسيم. وهو يقسم المضلع ذا (ن) ضلعا أ$_1$ أ$_2$ .... أ$_ن$ إلى مضلع ذى (م) ضلعا أ$_1$ أ$_2$ .... أ$_م$ ومضلع ذى (ن-م+٢) ضلعا أ$_1$ أ$_م$ أ$_{م+1}$ .... أ$_ن$

ووفقاً لفرضنا الذى إفترضناه، يكون العدد الكلى لمثلثات التقسيم مساوياً (م-٢) + [(ن-م+٢) -٢] = (ن -٢)[1] .

الدور التعليمي للاستقراء :

رغم أن الاستقراء لا يعطى برهاناً رياضياً وإنما يعطى تخميناً أو فرضاً محتملاً، فإنه تحت قيادة معلم نابه واعٍ، يستطيع عن طريقه وباستخدامه، أن يقدم فائدة تعليمية وتربوية قيمة، تتمثل فيما يلى :

١ - إذا تأكد المدرس من صحة النتيجة التي وصل إليها التلميذ بطريقة الاستقراء، فإنه يستخدمه ليقوم بدور الاقناع الذى يقبل فى المراحل الأولى، كبديل للبرهان، والذى يمثل مرحلة من مراحل تنمية مفهوم البرهان .

٢ - إذا تأكد المدرس من خطأ النتيجة التى وصل إليها التلميذ بطريقة الاستقراء، فعليه أن يقوده إلى اكتشاف خطأ ما وصل إليه، وذلك عن طريق مثال مضاد أو إثبات وجود تناقص، وهذا أيضا يمثل مرحلة من مراحل تنمية مفهوم البرهان .

٣ - ان الاستقراء يساعد على تجريد الظواهر، مما ينمى لدى التلاميذ الفهم والاكتشاف والإبداع، فيعطيهم ذلك الخبرة لأن يكون لهم فروض يضعونها بأنفسهم، وتكون موضع تحقيقهم أو برهانهم، بدلاً من أن يظل عملهم الرياضى مقيداً فقط بتحقيق أو برهان فروض الآخرين .

٤ - ان الطرق الاستقرائية تساعد على أن يكون تعليم الرياضيات، تعليم له معنى وفهم بالنسبة للتلاميذ، وذلك نتيجة لإيجابياتهم ووعيهم الكاملين بالموقف التعليمى .

---

(١) أ. سومينسكى وآخرون، مرجع سابق، ص ٧٦ - ٧٧.

٥ - إن إكتشاف التلاميذ لعلاقة ما بأنفهسم ، تساعدهم على تذكرها وفهمها ، بعد أن تتضح .

٦ - أن تقديم شواهد أو أسباب استقرائية وحدسية فى مرحلة مبكرة من مراحل النمو والنضج الفكرى ، يمهد الطريق للبراهين الشكلية النظرية .

ومن الناحية العملية البحتة ، فإن للاستقراء دور مهم ، يتمثل فى الآتى :

١ - يقع الاستقراء فى قلب الطريقة العلمية فى التفكير.

٢ - إن قدراً كبيراً من التقدم العلمي يعود إلى طرق استقرائية .

٣ - قام ومازال يقوم الاستقراءفى الرياضيات بالآتى :

(أ) إبداع أفكار جديدة كتخمينات أو فروض تتطلب البرهان.

(ب) إبداع عبارات تحمل مسلمات معقولة ومثمرة .

٤ - اكتشاف البراهين .

٥ - استخدام طرق الاستقراء فى توسيع المادة الرياضية نفسها .

أخطاء الاستقراء :

بالإضافة إلى أن الاستقراء ليس برهاناً رياضياً ، فإن له أخطاء شائعة ومحاذير يجب التنبيه لها وتفاديها ، وهى تتمثل فيما يلى :

١ - قبول بعض الفروض على أساس من الأفكار التوهمية ، أو إعتماداً على الخبرات الشخصية المحدودة غير الموضوعية ، وذلك كالقول بأن الرياضيات مادة للموهوبين فقط ، أو أن الرياضيات الحديثة لا يفهمها المدرسون فما بالك بالتلاميذ .

٢ - خطأ التعميم السريع ، أو القفز إلى نتائج ، دون المزيد من الفحص والتمحيص الدقيق ، كذا القياس الخاطئ ، أى التعميم قياساً على ظاهرة بعينها .

٣ - الدوران فى حلقة مفرغة ، وذلك باستخدام خاصية مطلوب إثباتها فى البرهان ، كما قد يحدث عندما يطلب منك أحد إبراز هويتك ، فتقدم له شهادة ميلادك ، أو يسألك أحد عن عمرك فتخبره عن وزنك .

الفصـــل الــــرابع

المنطق الرمزى

* مفهوم المنطق الرمزى .
* قــواعد المنطق الرمزى .

مفهوم المنطق الرمزى

يتكون الاستنتاج من فئة من العبارات المرتبطة مع بعضها بطريقة معينة ، وبعض هذه العبارات يكون بسيطا مثل : ٢+٣=٥ وبعضها صورة مثل : كل إنسان حيوان ، ومثل: يوجد عدد حقيقى س بحيث أن س + ١ = ٥ ، وبعضها مركباً يتكون من عبارتين (أو أكثر) يرتبطان بإحدى أدوات الربط . والعبارة جملة خبرية تعرف بالتقرير ، ويفترض بأنها صادقة (صحيحة) أوكاذبة (خاطئة) ، ولا تحتمل أن تكون صادقة وكاذبة فى نفس الوقت.

والمنطق الرمزى ، عبارة عن مجموعة من القواعد والأساليب ، التى تستخدم للحكم عما إذا كان استنتاج تقرير ، ما من تقرير أو تقارير سابقة عليه ، ممكناً أم لا. ومن ثم ، فإن المنطق الرمزى لا يختار ولا يحدد سلسلة التقارير ، التي يمكن استخدامها فى البرهان الرياضى . ولكن إذا ما تم إختيار هذه السلسلة ، ولتكن أ ، ب ، جـ ، ء ، يكون دور المنطق حينئذ هو تحديد إمكانية استنتاج ب من أ واستنتاج جـ من أ ، ب واستنتاج ء من أ ، ب ، جـ .

وبذلك ، فإن المنطق الرمزى يتعلق بالشكل ، وليس بالمضمون . ومهما كان معنى التقارير المستخدمة ، ومهما كانت النتيجة التى نصل إليها بالمنطق الرمزى مخالفة للبداهة والحس ، فإن هذا الاستنتاج الذى أوصلنا إلى هذه النتيجة يكون صحيحاً من حيث الشكل ، مادام التسلسل مطابقاً لقواعد المنطق الرمزى وأساليبه . وسوف نوضح ذلك بالمثالين التالين :

مثال (١) :

المعطيات :

١ - جميع الرجال فى اليمن يعملون بالتجارة .

٢ - أحمد رجل .

وحيث أن التقارير (١) ؛ (٢) صواب ، نستطيع أن نستنتج التقرير (٣) وهو : أحمد يعمل بالتجارة .

مما لاشك فيه أن التقرير (١) لا يتفق مع الواقع . فهناك رجال فى اليمن يعملون بالتجارة فعلاً . وهناك غيرهم يعملون فى ميادين أخرى أو لا يعملون بتاتاً . ولكن طالما إعتمدنا صواب التقريرين (١) ، (٢) من المعطيات . فإن المنطق لا يبحث فى المضمون وإتفاقه مع الواقع . بل يبحث فى صواب استنتاج التقرير (٣) من التقريرين (١) ، (٢) . والاستنتاج هنا صواب .

مثال (٢) :

المعطيات :

(١) س عدد صحيح موجب يحقق العلاقة س ≤ ٥

(٢) س = ص

الاستنتاج :

ص عدد صحيح موجب يحقق العلاقة ص ≤ ٥

قواعد المنطق[1] :

الكلمات والقضايا :

لكل فرع من فروع المعرفة مصطلحاته الخاصة به ، التى تستعمل بمعنى ضيق ، يختلف عن ذلك المعنى الدارج فى الكلام المعتاد .

كذلك ، فإن للرياضيات مصطحات منها : عدد ، صفر ، زائد ، زاوية ، مثلث ، دائرة ، زمرة ، معادلة ، جذور ، إشتقاق ... إلخ ، ولكن ، إذا أردنا تعريف السداسى المنتظم - مثلاً - بأنه الشكل المحاط بستة مستقيمات متساوية متلاقية مثنى مثنى وزواياه الستة متساوية ، وكل منها = ١٢٠ْ ، لوجدنا أننا أمام مصطلحات فنية جديدة ، هى : ستة ، مستقيمات ؛ متساوية ، متلاقية ، زوايا ، ١٢٠ْ . وكل من هذه المصطلحات يحتاج بالتبعية إلى تعريف له ، وباستمرار مثل هذا العمل ، نجد أننا ندور فى حلقة مفرغة . وللهروب منها نقبل بعض الكلمات الأولية بدون تعريف ، ونطلق عليها لفظ لا معرفات ؛ وذلك مثل :

---

(١) محمد جواد سعد الدين ، المنطق الرياضى ، البحرين : وزارة التربية والتعليم (د.ت) .

النقطة والمستقيم . ومن هاتين الكلمتين غير المعرفتين ، نستطيع وضع تعريفات لبعض المفاهيم الهندسية ، مثل : زوابة ، مثلث : شكل رباعى ، وهكذا. وبعد الحصول على عدد كاف من الكلمات الفنية (المعرفات) ، نستطيع أن نكون منها عبارات وجملاً ، تبدو بعضها بديهية ومقبولة ، فنسلم بصحتها دون جدل ، ونطلق عليها لفظ المسلمات أو البديهيات مثل : كل مستقيمين غير متوازيين يتقاطعان فى نقطة واحدة ، وبعضها الآخر لا يمكن الحكم على صحته أو بطلانه إلا بإستخدام المحاكمة المنطقية (الاستنتاج أو البرهان الرياضى) ، وذلك مثل : إذا تقاطع مستقيمان ، فالزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان ، إن الحجج والقواعد المتعلقة بالتفكير والاستنتاج ، تعترف بمبادئ المنطق .

أما العبارات التى يمكن استنتاجها استنادا إلى المسلمات (البديهيات) والعبارات المعروفة الأخرى ، فنسميها النظرية ، وعليه فالنظرية معلقة بمسلماتها ، وأن صحة النظرية هى من صحة مسلماتها ، ولذلك فهى قضية نسبية .

أيضاً ، العبارات التي يمكن صياغتها من الكلمات الأولية والمعروفة ، وكانت خالية من أى معنى ، نقول عنها أنها جمل غير مفيدة ، أما إذا كانت ذات معنى، نقول عنها أنها جمل مفيدة .

تعريف :

القضية جملة خبرية ذات معنى ، يمكن نعتها بواحدة فقط من الصفتين التاليتين : إما صحيحة أو خاطئة .

فمثلا س + ١ = ٥ حيث س = ٤ قضية رياضية ، لأنه يمكن نعتها بصحيحة . كذلك ، س +١ = ٥ حيث س = ٥ قضية رياضية ، لأنه يمكن نعتها بخاطئة . أما أيهما أكبر س أم ص ، فليست قضية ، لأنه لا يمكن الكلام عن صحتها أو خطئها.

كذلك ، إجمع ٣ + ٥ ليست قضية ، لأنه لا يمكن الكلام عن صحتها أو خطئها ، وبالمثل : (١) + (-٣) ، العرق والدم والدموع ، ليست قضايا ، لأنها جمل غير مفيدة .

نفي القضايا :

القضية (القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية) نفيها هو القضية (ليست القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية).

نلاحظ بالحدس أن نفى القضية يكون صحيحاً . إذا كانت القضية ذاتها خاطئة . فمثلاً ، القضية (جميع سكان الريف في مصر يعملون بالزراعة) قضية خاطئة ، لأن هناك بلاشك فئات تعمل فعلا بالزراعة . وفئات أخرى تعمل بمهنة التدريس . أو مهنة الطب . أو غير ذلك ، كما أن هناك فئات أخرى لا تعمل بأى عمل . واضح أن نفى القضية الذى على الصورة (ليس جميع سكان الريف فى مصر يعملون بالزراعة قضية صحيحة) . وينبغى أن نفرق بين القضيتين . ليس جميع سكان الريف فى مصر يعملون بالزراعة ، جميع سكان الريف فى مصر لا يعملون بالزراعة . فالأولى قضية صحيحة ، والثانية قضية خاطئة .

إذا رمزنا لقضية ما بالرمز ق فإن نفى القضية ق يرمز له ~ ق . فإذا كانت ق صحيحة ، فإن ~ق خاطئة ، والعكس . ويمكن تمثيل ذلك بالجدول التالى :

ق	~ق
١	٠
٠	١

حيث يدل الرمز (١) على صحة القضية ، (٠) على خطأ القضية .

الروابط :

يمكن ربط قضيتين أو أكثر بروابط لنحصل على قضية جديدة . وتعتمد قيمة صدق القضية الجديدة على قيمة صدق القضايا البسيطة المكونة لها ، وعلى أدوات الربط المستخدمة فى تكوين القضية الجديدة . وينبغى أن ننوه إلى أننا عندما نكون قضية مركبة بواسطة أحد الروابط ، فإن ذلك لا يتطلب وجود علاقة فى المحتوى ، أو المعنى بين القضايا المكونة لها . والسبب هو صعوبة توضيح فكرة وجود علاقة بين قضيتين . وتستعمل أدوات الربط "أو" ، "و" ، (إذا كان ... فإن) ، إذا وفقط إذا ، على النحو التالى :

(أ) الفصل (الاختيار) ، وأداة الفصل (أو) :

إذا كانت ق ؛ ك أى قضيتين ، فإن الجملة (ق أو ك) تكون قضية صحيحة ، إذا و فقط إذا ، كانت واحدة على الأقل من مركبتيها ق ، ك صحيحة .

وهذه نرمز لها بالرمز (ق V ك) ، ويمكن تلخيص الاحتمالات الممكنة فى الجدول التالى :

ق	ك	ق V ك
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح ما سبق :

(١) القاهرة عاصمة مصر أو باريس عاصمة فرنسا قضية صحيحة ، لأن كل من مركبتيها قضية صحيحة .

القاهرة عاصمة مصر أو باريس عاصمة بلجيكا قضية صحيحة ، لكون إحدى مركبتيها صحيحة .

القاهرة عاصمة الأردن أو باريس عاصمة فرنسا قضية صحيحة ، لكون إحدى مركبتيها صحيحة .

القاهرة عاصمة الأردن أو باريس عاصمة بلجيكا قضية خاطئة لكون مركبتيها خاطئتين .

(٢) ٣ عدد فردى أو ٣ < ٥ قضية صحيحة لأن كل من مركبتيها قضية صحيحة .

٣ عدد فردى أو ٣ > ٥ قضية صحيحة لكون أحد مركبتيها صحيحة .

٣ عدد زوجى أو ٣ < ٥ قضية صحيحة لكون أحد مركبتيها صحيحة .

٣ عدد زوجى أو ٣ > ٥ قضية خاطئة لكون مركبتيها خاطئتين .

(ب) الوصل (العطف) وأداة الوصل (و) :

إذا كان ق ، ك أى قضيتين فإن الجملة (ق و ك) تكون قضية صحيحة ، إذا وفقط إذا كانت كل من مركبتيها ق ، ك صحيحة . وهذه نرمز لها بالرمز (ق ∧ ك). ويمكن تلخيص الاحتمالات الممكنة فى الجدول التالى :

ق	ك	ق ∧ ك
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح ما سبق :

مثال (١) :

القمر يدور حول الأرض قضية صحيحة ؛ تشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية صحيحة أيضاً ، إذن القضية المركبة : القمر يدور حول الأرض وتشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية صحيحة .

الأرض تدور حول القمر قضية خاطئة ، تشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية صحيحة ، إذن القضية المركبة : الأرض تدور حول القمر وتشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية خاطئة .

القمر يدور حول الأرض قضية صحيحة ، لا تشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية خاطئة ، إذن القضية المركبة : القمر يدور حول الأرض ولا تشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية خاطئة .

الأرض تدور حول القمر قضية خاطئة ، لا تشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية خاطئة أيضاً ، إذن القضية المركبة : الأرض تدور حول القمر ولا تشتهر سويسرا بصناعة الساعات قضية خاطئة .

مثال (٢) :

(٤ عدد زوجى) و (٤ +١=٥) قضية صحيحة .

(٤ عدد زوجى) و (٤ +٠=٥) قضية خاطئة

(٤ عدد فردى) و (٤ + ١= ٥) قضية خاطئة .

(٤ عدد فردى) و (٤ + ٠=٥) قضية خاطئة .

(جـ) الشرط وأداة الشرط (إذا كان ... فإن ...) :

إذا كانت ق . ك أى قضيتين . فإن الجملة (إذا كان ق فإن ك) تكون قضية خاطئة إذا وفقط إذا كانت ق صادقة . ك خاطئة . وتكون قضية صحيحة فى غير هذه الحالة . وهذه نرمز لها بالرمز (ق ⟸ ك) . ويمكن تلخيص الإحتمالات الممكنة فى الجدول التالى :

ق	ك	ق ← ك
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	١
٠	٠	١

وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح ما سبق :

٢ + ٥ = ٧ ⟵ ٧ - ٢ = ٥ عبارة صحيحة .

٢ + ٥ = ٧ ⟵ ٧ - ٢ = ٦ عبارة خاطئة .

٢ + ٥ = ٦ ⟵ ٧ - ٢ = ٥ عبارة صحيحة .

٢ + ٥ = ٦ ⟵ ٧ - ٢ = ٦ عبارة صحيحة .

(د) ثنائية الشرط (إذا وفقط إذا) :

يمكن أن نرمز للعبارة "إذا كان المثلث متساوى الأضلاع . فإنه يكون متساوى الزوايا" بالرمز (ق ⟵ ك) . ويمكن أيضاً أن ترمز للعبارة "إذا كان المثلث متساوي الزوايا فإنه يكون متساوي الأضلاع " بالرمز (ك ⟵ ق) .

ويمكن صياغة ما سبق على الصورة المختصرة الآتية :

" يكون المثلث متساوى الأضلاع إذ وفقط إذا كان متساوى الأضلاع" .

يمكن أن نرمز للعبارة السابقة بالرمز : ق ⟷ ك .

وبعامة : إذا كانت ق ، ك أى قضيتين فإن الجملة " ق $\longleftrightarrow$ " تكون صحيحة ، إذا كانت مركبتيها ق ، ك صحيحتين معا ، أو خاطئتين معاً

ويمكن تلخيص الإحتمالات الممكنة فى الجدول التالى :

ق	ك	ق $\longleftrightarrow$ ك
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	١

وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح ما سبق :

(٣ × ٤ = ١٢) $\longleftrightarrow$ (٢ + ٣ = ٥) قضية صحيحة .

(٣ × ٤ = ١٢) $\longleftrightarrow$ (٢ + ٣ = ٦) قضية خاطئة .

(٣ × ٤ = ١٥) $\longleftrightarrow$ (٢ + ٣ = ٥) قضية خاطئة .

(٣ × ٤ = ١٥) $\longleftrightarrow$ (٢ + ٣ = ١) قضية صحيحة .

(هـ) التساوى :

إذا قلنا إن ١ + ٢ تعنى أن (١ + ٢) و (٣) تعبران عن شىء واحد ، وبعامة : العبارة س = ص تعنى أن كلا من س ، ص إسم لشىء واحد .

أمثلة :

$\frac{١}{٤}$ = ٢٥ر٠ ، ٣ × ٥ = ١٥ ، ٧ + ٢ = ١٠ - ١

(و) التكافؤ :

تعريف (١) :

نقول عن قضيتين أنهما متكافئتان ، إذا كانت القضية ق $\Longleftrightarrow$ ك صحيحة ، أى إذا كانت القضيتان (ق) و (ك) صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً .

تعريف (٢):

تكون القضيتان هـ ، ى المركبتان من القضايا ق ، ك ، ل ، ... ، ن متكافئتين وتكتب هـ $\Longleftrightarrow$ ى ، إذا كانت قيم الصحة للقضية هـ نفس قيم الصحة للقضية ى لأى قيم صحة تفرض للقضايا ق ، ك ، ل ، ... ، ن

من التعريفين السابقين ، يمكن استنتاج ما يلى :

ق تكافئ ق .

إذا كانت ق تكافئ ك فإن ك تكافىء ق .

إذا كانت ق تكافئ ك ، ك تكافئ ل فإن ق تكافئ ل لأية ثلاثة قضايا ق ، ك ، ل .

الفصل الخامس

الحكم على صلاحية استنتاج ما

للحكم على صلاحية استنتاج ما ، نصيغه كعبارة مركبة يعبر عنها بالرموز، ثم نبحث قيم الصدق للصورة العامة لهذه العبارة ، إعتماداً على القواعد السابقة ، فإذا كانت الصورة العامة صادقة دائماً ، أعتبر الاستنتاج صالحاً ، وإلا فإنه يعتبر استنتاجاً غير صالح .

مثـال :

ناقش صلاحية الاستنتاج المذكور فى المثال :

إذا ساوت زوايا مثل نظائرها فى مثلث آخر ، فإن المثلثين يكونان متشابهين .

[ق ← ك) ∧ ق] ← ك

الحـل :

نبحث جداول الصدق الخاص بالاستنتاج السابق :

ق	ك	ق ← ك	(ق ← ك) ∧ق	(ق ← ك) ∧ق ← ك
١	١	١	١	١
٠	١	١	٠	١
١	٠	٠	٠	١
٠	٠	١	٠	١

ونلاحظ فى العمود الأخير أن الصورة :

(ق ← ك) ∧ ق ← ك صادقة دائماً ، أى مهما كانت قيم صدق مركبتيها ، ومن ثم فإن الاستنتاج المعطى استنتاج صالح .

ويعني ذلك أن النتيجة " المثلثان أ ب حـ ، ء هـ و " هى نتيجة لازمة تتبع الأسباب المعطاه ، وهى :

١ - إذا ساوت زوايا مثلث نظائرها فى مثلث آخر ، فإن المثلثين يكونان متشابهين .

٣ - المثلثان أ ب حـ ، ء هـ و تتساوى زواياهما المتناظرة . لذا فإنهما متشابهان .

ونلاحظ فى هذا المثال ، إننا هنا لم نثبت صحة النظرية الهندسية القائلة بأنه "إذا ساوت زوايا مثلث نظائرها فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين" .

ولكننا أثبتنا صحة وشرعية الاستراتيجية ، التى نتبعها فى البراهين النظرية ، عندما نستنتج حالة خاصة من حالة عامة .

وأما برهان الحالة العامة الممثلة هنا فى نظرية التشابه المشار إليها ، فهو أمر يعتمد أيضاً على الهندسة الإقليدية وخواصها .

مثـــال :

ناقش صلاحية الاستنتاج التالى :

إذا تساوت زاويتان فى أى مثلث ،فإن المثلث يكون متساوى الساقين ، أ ب حـ مثلث متساوي الساقين . لذلك : المثلث أ ب حـ فيه زوايتان متساويتان .

الحـــل :

نضع الصورة العامة لهذا الاستنتاج كالآتى :

ق = المثلث به زاويتان متساويتان .

ك = المثلث متساوي الساقين .

إذن ، الاستنتاج يمثل بالصورة :

(ق ← ك) ∧ ك ← ق

ولاختبار صلاحية هذا الاستنتاج ، نبحث جدول الصدق الخاص به ، كما يلى :

ق	ك	ق ← ك	(ق ← ك) ∧ك	(ق ← ك) ∧ك ← ق
١	١	١	١	١
٠	١	١	١	٠
١	٠	٠	٠	١
٠	٠	١	٠	١

ومن العمود الأخير . نلاحظ أن العبارة الأخيرة ليست صادقة دائماً . ومن ثم فإن الاستنتاج الذى نعبر عنه ليس صالحاً . وعلى ذلك فإن النتيجة " المثلث أ ب حـ فيه زاويتان متساويتان " ليست نتيجة لازمة من الأسباب المعطاه .

ونلاحظ فى هذا المثال أننا رغم علمنا بصدق الأسباب وصدق النتيجة ، إلا أن صدق هذه النتيجة ليس مردوداً للمنطق الموجود فى هذا المثال . وبالتالى ، فإن البرهان على صحة هذه النتيجة بالأسباب المعطاه هنا ، هو برهان خاطئ .

مثـــال :

ناقش صحة الاستنتاج التالى :

إذا كان العدد يقبل القسمة علي ٣ فإنه يقبل القسمة على ٧ .

إذا كان العدد يقبل القسمة على ٧ فإنه يقبل القسمة على ٥ .

لذلك إذا كان العدد يقبل القسمة علي ٣ فإنه يقبل القسمة على ٥ .

الحــــل :

الصورة العامة لهذا الاستنتاج هى :

[(ق ⟵ ك) ∧ (ك ⟵ ر)] ⟵ (ق ⟵ ر) .

ق	ك	ر	ق ← ك	ك ← ر	(ق ← ك) ∧ (ك ← ر)	ق ← ر	(ق ← ك) ∧ (ك ← ر) ← (ق ← ر)
١	١	١	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١	١
١	٠	١	٠	١	٠	١	١
٠	٠	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	٠	٠	١
٠	١	٠	١	٠	٠	١	١
١	٠	٠	٠	١	٠	٠	١
٠	٠	٠	١	١	٠	١	١

نلاحظ من العمود الأخير أن العبارة موضع البحث صادقة دائماً . إذن الاستنتاج صالح . ويعني هذا أن الاستراتيجية التى إتبعناها في استخلاص النتيجة ، هى استراتيجية مشروعة منطقياً . ورغم ذلك ، فإن المناقشة المذكورة لا تصلح برهاناً على صحة النتيجة ، لأن العبارات المستخدمة خاطئة بالنسبة لجبر الأعداد .

مثـــال :

ناقش مدى صلاحية الاستنتاج الذى صورته :

(ق ∧ ~ ق) ⟵ ك

الحـــل :

ق	ك	~ق	ق ∧ ~ق	(ق ∧ ~ق) ⟵ك
١	١	٠	٠	١
٠	١	١	٠	١
١	٠	٠	٠	١
٠	٠	١	٠	١

وحيث أن التقرير صادق دائماً . فإن أى استنتاج ينجم عنه يكون صالحاً . إن هذا النوع من الاستنتاج يتكون من سببين يعطيان تعارضاً ونتيجة . وحيث إن الاستنتاج صالحاً ، فمعنى ذلك أن التعارض يمكن أن ينتج عنه أى شىء . فمثلاً الاستنتاجين التاليين صحيحان :

إذا كان ١ + ١ = ٢ ، ١ + ١ ≠ ٢ فإن أى مثلث يكون متساوى الساقين .

إذا كان ١ + ١ = ٢ ، ١ + ١ ≠ ٢ فإنه لا توجد مثلثات متساوية الساقين .

إن هذا يؤكد لنا أهمية تجنب وجود تعارض فى أى نظام منطقى ، مثل نظام الرياضيات . مما سبق ، إذا واجه الطالب استنتاجاً معيناً ، فلإختبار

صلاحيته ، عليه أن يوجد الصورة العامة التي تمثله ، ويبحث مدى صدق العبارات الممثلة للصورة العامة .

مثال :

كل المثلثات ليست مربعات .

كل المربعات ليست دوائر .

لذلك :

كل المثلثات ليست دوائر .

الحل :

الصورة العامة لهذا الاستنتاج :

[(ق ⟵ ~ ك) ∧ (ك ⟵ ~ ر)] ⟵ (ق ⟵ ~ ر) .

ق	ك	ر	~ ك	~ ر	ق ← ~ ك	ك ← ~ ر	(ق ← ~ ك) ∧ (ك ← ~ ر)	ق ← ~ ر	[(ق ← ~ ك) ∧ (ك ← ~ ر)] ق ← ~ ر
١	١	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١
٠	١	١	٠	٠	١	٠	٠	١	١
١	٠	١	١	٠	١	١	١	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	١	١	١	١	١
١	١	٠	٠	١	٠	١	٠	١	١
٠	١	٠	٠	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	١	١	١	١	١	١
٠	٠	٠	١	١	١	١	١	١	١

فى المثال السـابق : لا تصلح المناقشـة المذكورة برهاناً على صـحة النتيـجة "كل المثلثات ليست دوائر" . على الرغم من أن الأسـباب صحـيحـة (والنتيـجة أيضاً صحيحة) ، ولكن الاستراتيجية ليست صحيحة منطقياً إذ أن الصورة :

[(ق ⟵ ~ك) ∧ (ك ⟵ ~ ر)] ⟵ (ق ⟵ ~ ر) ليست تحصيل حاصل .

العلاقة بين صلاحية الاستنتاج وصدق عباراته :

من فحص أمثلة متعددة لاستنتاجات مختلفة ، يمكن ملاحظة الآتى :

١ - إذا كانت الأسبـاب كلها صادقة ، وكان الاسـتنتاج صالحاً ، فإن النتـيجة تكون صادقة .

٢ - إذا كان سبب واحـد على الأقل كاذباً ، وكان الاستنتاج صـالحاً ، فلا يمكن الحكم علي صدق النتيجة (قد تكون صادقة وقد تكون كاذبة) .

٣ - إذا كـانت الأسبـاب كلها صـادقة ، وكـان الاستنتـاج غيـر صالح ، فـإن النتيجة تكون كاذبة .

٤ - إذا كان الاستنتاج صـالحاً ، وكانت النتيجة كـاذبة ، فإن واحد على الأقل من الأسباب يكون كاذباً .

٥ - إذا كان الاستنـتاج صالحاً ، وكانت النتـيجة صادقـة ، فإنه لا يمكن الحكم على صدق الأسباب .

٦ - إذا كانت الأسباب صـادقة ، وكانت النتيجة كاذبـة ، فإن الاستنتاج يكون غير صحيح .

الفصل السادس
البرهان الرياضى

- مفهوم البرهان الرياضى .
- أساليب البرهان الرياضى :
  * البرهان المباشر .
  * البرهان غير المباشر .
  * البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضى .
  * إثبات الشرط اللازم والكافى .
  * البرهان باستنفاد جميع الحالات .
  * البرهان على وجود حل .
  * إثبات عدم صحة عبارة ما .
  * إثبات بعض النظريات الهندسية جبرياً .
  * حل المعادلات الجبرية بإستخدام التفاضل .
  * إثبات بعض قوانين الحجوم فى الهندسة الفراغية بإستخدام التكامل .
  * حل بعض المسائل الميكانيكية بيانياً .

مفهوم البرهان الرياضى

تستخدم كثيراً كلمة البرهان فى حياتنا اليومية ، وإن كان ذلك يتم بدرجات متفاوتة حسب مدى دقة المواقف التى تتطلب نوعاً من الإقناع . والذى يهمنا هنا هو المعنى الرياضى للبرهان ، الذى يعتمد علي شواهد ثابتة ، وقواعد منطقية متفق عليها . وبمعنى آخر ، يعتمد البرهان الرياضى على قواعد موضوعية ومبادئ ثابتة فى المنطق ، وذلك للبعد عن التأثير الذاتى والشخصى للفرد .

ولعل سبب إهتمامنا بمفهوم البرهان كقيمة تربوية رئيسة يرجع إلي أننا نبغي ونسعي لينتقل الطالب من المفهوم الذاتى للإقناع ، إلى المفهوم الموضوعى المبنى على معايير ذات طبيعة غير ذاتية .

والبرهان الرياضى كمفهوم ناضج ، هو : **تتابع من العبارات المترابطة موجهة نحو إثبات صحة نتيجة معينة بواسطة مجموعة مقبولة ومعترف بها من اللامعرفات والتعاريف والمسلمات والعبارات السابق برهانها بما فى ذلك مسلمات ونظريات المنطق .**

ورغم أن البرهان الرياضى لا يعتمد علي المشاهدة والتجريب ، فإن جذور تكوينه تضرب بعمق فى كثير من الخبرات الناشئة عن الملاحظة والمشاهدة .

وبالنسبة للمراحل التعليمية المختلفة لتعليم الرياضيات ، فإن مفهوم البرهان يبدأ من مرحلة غير ناضجة كشئ مقنع (الاستقراء) ، ويسير نحو مرحلة ناضجة بالمعنى الرياضى (الاستدلال) .

إن أسلوب بناء المفاهيم الرياضية فى التعليم العام يسير – فى المعتاد – بطريقة حلزونية ، حيث يقدم المفهوم فى مراحل متتالية ، تبدأ عادة بمرحلة الإنشاء والتكوين إعتماداً على أسلوب حسى فيه شئ من التجسيد أو التجسيم ، ثم نعود فى مرحلة تالية لمعالجة ذهنية تعتمد على الفطنة وتتدرج حتي تصل إلى مرحلة تتم فيها المعالجة بالأسلوب الشكلى المنهجى . وفى إطار

هذا الأسلوب . وإنسجاماً مع مستوى النضج الفكرى للطالب ، الذى هو بطبيعته مرحلى أيضاً . فإن مفهوم البرهان يبدأ بأساليب أقرب فى طبيعتها إلى مفهوم الإقناع (الاستقراء) . وينتهى بالمفهوم الرياضى بمعناه الناضج ، الذى يعتمد علي ما يسمى بالاستنتاج اللازم والكافى أو الاستنتاج الصالح أو الاستدلال (إذا كان .... فإن) .

والاستنتاج ، بعامة ، هو : فئة من العبارات تتكون من سبب أو أكثر (الشواهد أو المقدمات) ، وتحقق نتيجة .

ونؤكد ، مرة أخرى ، أن القضية الرياضية تظل تخميناً أو فرضاً أو نتيجة محتملة ، إذا وصلنا إليها بطريق الاستقراء ، ولكنها تصبح نظرية أو نتيجة مؤكدة ، إذا وصلنا إليها بطريق الاستنتاج (الاستدلال) ، الذى تحكمه قوانين المنطق .

ويعتمد البرهان - بمعناه الرياضى - على صحة قضية ما ، على عنصرين أساسيين :

١ - النظام الرياضى الذى تنتمى إليه هذه القضية ، بما فى هذا النظام من أوليات ومعرفات ومسلمات ومبرهنات سابقة ، تكون مرتبطة بالقضية موضع البرهان .

٢ - الاستراتيجية المتبعة فى الوصول من المقدمات أو المعطيات ، إلى النتيجة أو القضية المطلوب البرهان علي صحتها . وهذه الاستراتيجية لابد وأن تعتمد على إحدى صور الاستنتاج الصالح منطقياً (Valid Inference) .

وبشىء من التبسيط ، فإن الاستنتاج بصفة عامة ، هو : **تتابع من العبارات تتكون من مقدمات (سبب أو أكثر) ومن نتيجة تالية** . ويمكن التعبير عن هذا التتابع بعبارة مركبة ، ترتبط فيها العبارات بروابط منطقية مثل " و " ، " أو " ، " إذا كان .... فإن" والتى رموزها على الترتيب ٨ ، ٧ ، ⟵ .

مثــال :

المقدمات :

إذا كان رقم الآحاد فى عدد صحيح هو الصفر ، فإن العدد يقبل القسمة على ١٠ ، والعدد ١٩٨٠ رقم أحاده الصفر .

النتيجة :

العدد ١٩٨٠ يقبل القسمة علي ١٠ .

أن الصورة العامة لهذا الاستنتاج ، هى .

(ق ← ك) ٨ ق ← ك

حيث ق تمثل العبارة (العدد رقم أحاده الصفر) ، ك تمثل العبارة (العدد يقبل القسمة على ١٠) . ولتحديد إذا كانت المناقشة تصلح كبرهان على صحة النتيجة فى المثال السابق ، نذكر أسانيد البرهان الصحيح ، ثم نطابق النتيجة التى حصلنا عليها مع هذه الأسانيد ، وهى :

١ - عبارات مقبول أو مثبت صحتها فى النظام الذى نعمل فيه .

٢ - صورة منطقية تكون تحصيل حاصل ، أى تكون صحيحة دائماً مهما كانت صدق مركباتها ، وذلك فى ضوء قواعد عمليات الربط فى المنطق .

فى ضوء ما سبق ، تصلح المناقشة كبرهان علي صحة النتيجة "العدد ١٩٨٠ يقبل القسمة علي ١٠" ، وذلك لأن :

(أ) الأسباب صحيحة بالنسبة لجبر الأعداد التى تكتب بالنظام العشرى .

(ب) الاستراتيجية المتبعة صحيحة منطقياً لأن صورتها العامة تحصيل حاصل .

ملاحظة مهمة :

فى البراهين الرياضية من الضرورى أن نستند إلي أسباب نعترف بصحتها رياضياً ، وأن نستخدم استراتيجية تعتمد على استنتاج صالح ، ومن ثم نصل إلى نتائج صحيحة فى إطار النظام الذى نعمل فيه .

أساليب البرهان الرياضى

البرهان الرياضى هو القيام بإثبات صدق عبارة ما مطلوب التدليل على صحتها (النتيجة) ، من عبارات معطاه (الأسباب) ، بطرق تعتمد على منطق الاستنتاج .

وهنا تبرز عدة عناصر أساسية يعتمد عليها السير فى البرهان ، هى :

(١) المعطيات ، وهى العبارات المعطاه صراحة كأسباب أو كمقدمة ، وهذه نفترض صدقها .

(٢) عبارات مساعدة تنتمى للنظام الذى نعمل فيه (مثل الهندسة الأقليدية أو جبر الفئات أو ....) ، وهذه قد تكون عبارة أولية لهذا النظام (مسلمات) ، أو ناشئة عن تعاريف ، أو سبق البرهان على صحتها . ونحن نستعين – فى بعض الأحيان – بمثل هذه العبارات ، كحلقة تساعد على سلسلة الوصول من المعطيات إلى المطلوب .

وهذه العبارات المساعدة لا تعطى صراحة فى المسألة موضوع البرهان ، ولكن الطالب يختارها من خبرته وتحليله للموقف فى المسألة .

وقد يستعين الطالب بعبارات ترد كنتائج مرحلية يثبت صحتها ، ثم يستخدمها نفسها كأسباب لنتائج تالية . كما ، قد يقوم بإجراء "عمل" مسموح به فى النظام ، الذى يعمل فيه ،كما فى الهندسة .

(٣) الطريق الذى نسلكه للوصول من سبب أو أكثر إلى نتيجة معينة لابد وأن يكون معتمداً على أحد صور الاستنتاج الصالح ، يسمى الاستدلال ، وهو يعنى بصفة عامة الوصول من العام إلى الخاص (وهذا عكس الاستقراء) ، أو الوصول من قضايا عامة إلى قضية عامة أخرى . ولكننا نستخدم هنا مصطلح الطريقة الاستدلالية فى البرهان أو برهان استدلالى ، لنعنى أنه يعتمد على أى من صور الاستنتاج اللازم أو الاستنتاج الصالح ، ونكرر القول بأنه إذا كانت الأسباب كلها صادقة والاستنتاج صالحاً ، فإن النتيجة تكون صادقة بالضرورة .

أيضاً ، هناك إتفاق عام على وجود ثلاث خطوات أساسية ، تحدد الطريق الذى نسلكه فى البراهين ، وهى :

١ - تحليل المعطيات .

٢ - تحليل المطلوب .

٣ - إيجاد العلاقة بين المعطيات وبين المطلوب .

لذا ، على الطالب أن يسأل نفسه الأسئلة التالية :

١ - ما معطيات المسألة ؟

٢ - ما المطلوب فيها ؟

٣ - كيف يربط بين المعطيات وبين المطلوب للوصول إلي الحل ؟

وعلي ذلك ، ينبغى أن يقوم الطالب أولاً بتحليل المعلومات . ونعنى بالتحليل، إدراك العلاقات وتقسيم الشيء إلى مكوناته وإدراك موضع كل منها فى الصورة العامة . وقد يستعين الطالب فى عمله هذا ، برسم تخطيطى ليوجهه إلى طريقة البرهنة ، ويعطيه فكرة عن أسلوب الحل . وبعد ذلك ، يجب عليه تحليل وتنظيم نتائجه التى يصل إليها . وحتي يربط الطالب بين المعطيات والمطلوب ، عليه أن يعبر الفجوة بينهما ، أي بين المعلوم والمجهول ، وبذا يجعل العلاقات فى مجال تفكيره ، مما يساعده على الوصول إلى المطلوب.. وحتي يحقق ذلك ، عليه أن يستعين بخبراته السابقة ، ليختار منها ما يناسب الموقف الجديد ، بشرط ألا يدع لليأس مكاناً بين جوانبه ، إذا أخفق ، ويبدأ من جديد مرة أخرى ليختار طريقاً آخر يصل من خلاله إلى المطلوب . وفى حالة عجز الطالب فى الوصول إلي الحل ، عليه إلتماس المساعدة من المدرس ، إلى أن يحين الوقت الذى يستطيع الاعتماد على نفسه كلية[١] .

ويمكن تلخيص أهم الطريق والاستراتيجيات التى تستخدم فى البراهين ، فيما يلى .

---

(١) أحمد أبو العباس ، الرياضيات ، أهدافها وطرق تدريسها ، الطبعة الأولى ، القاهرة : دار النهضة العربية ، ١٩٦٣ ص : ١٨٢ - ١٨٥ .

أولاً : البرهان المباشر :

وهو أكثر البراهين استخداماً . وفيه نتعامل مع "المطلوب" نفسه وليس مع "مطلوب" مكافئ له . وفيه قد نحتاج إلى :

١ - البرهان على صدق عبارة شرطية ، مثل (ق ← ك) :

فى هذه الحالة نفترض صحة ق ثم نثبت صحة ك (بالاستعانة بخواص النظام) . وطبقاً لقواعد العبارات الشرطية ، فإن الشرط يكون صادقاً ، عندما يكون مقدم الشرط (ق) صادقاً وتالى الشرط (ك) صادقاً .

مـــثال :

اثبت صدق العبارة التالية :

إذا كان أ + ٣ = ٥ فإن أ = ٢ (حيث أ عدد طبيعى) .

البرهـــان :

نفرض أن أ + ٣ = ٥ عبارة صادقة .

إذن أ + ٣ = ٢ + ٣ عبارة صادقة (لأن ٥ = ٢ + ٣)

وإذن أ = ٢ عبارة صادقة (خاصية الحذف) .

وإذن (أ + ٣ = ٥) ← (أ = ٢) عبارة صادقة (من قوانين المنطق)

أي أن إذا كان أ + ٣ = ٥ فإن أ = ٢ عبارة صادقة .

٢ - استخدام سلسلة من العبارات الشرطية :

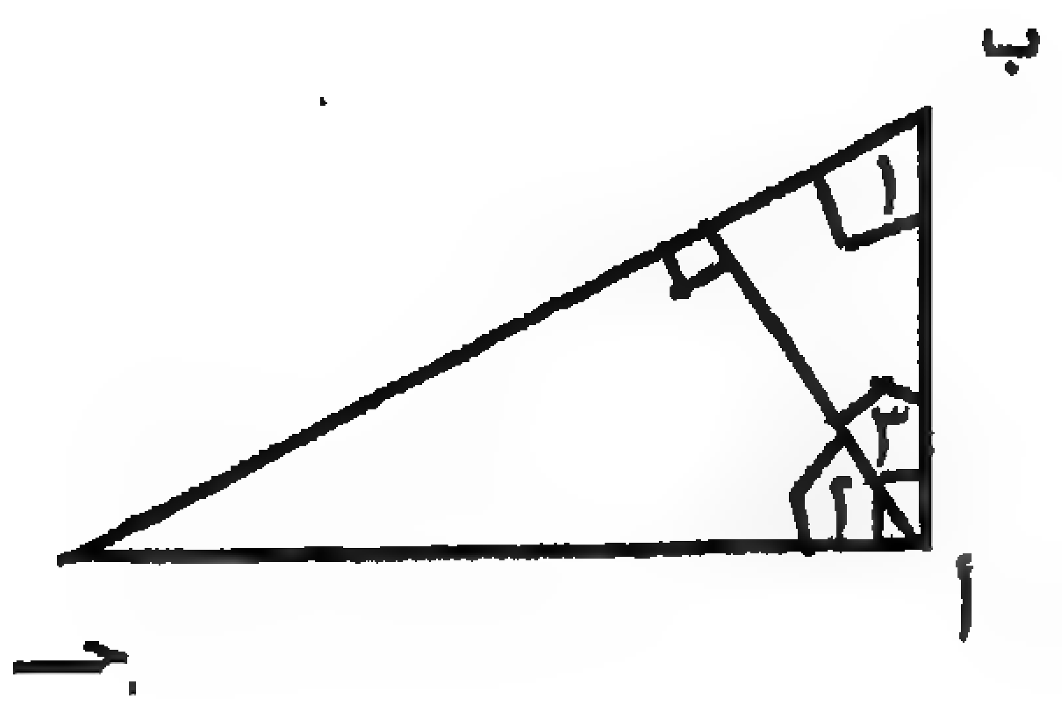
إذا كانت المعطيات ق والمطلوب ك مثلا ، فإننا قد نحتاج إلى نتائج وسيطة تنظم بواسطتها سلسلة من العبارات الشرطية المعطوفة ، نصل فيها من المعطيات إلى المطلوب ، مثل : ق ← أ، أ ← ب ، ب ← ك ، وذلك إعتمادا على التوتولوجية المنطقية [(ق ← أ) ∧ (أ ← ب) ∧ (ب ← ك) ← (ق ← ك)] .

وبإعتبار أن ق ← ك صحيحة ، وإفتراض أن ق صحيحة ، تكون ك صحيحة (من قواعد العبارات الشرطية) .

مثـال :

أ ب حـ مثلث قـائم الزاوية فى أ . أ د ⊥ ب حـ . والمطلوب إثبات أن أ $\hat{ب}$ حـ = ء $\hat{أ}$ حـ .

البرهـان :



(أ ء $\hat{ب}$ قائمة . $\hat{أ}$ قائمة) .

($\hat{١}$ تتمم $\hat{٣}$ ، $\hat{٣}$ تتمم $\hat{٢}$) عبارة صادقة (من خواص الهندسة الإقليدية) .

إذن $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ عبارة صادقة (من خواص الهندسة الإقليدية) .

من الشرطين السابقين ، ومن قاعدة التسلسل ، ينتج أن :

($\hat{أ}$ قائمة ، أ $\hat{د}$ ب قائمة) ؛ $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ عبارة صادقة (من قواعد المنطق)

حيث إن ($\hat{أ}$ قائمة ، أ $\hat{ء}$ ب قائمة)عبارة صادقة (من قواعد المنطق).

إذن ($\hat{١}$ = $\hat{٢}$) عبارة صادقة (من قواعد المنطق) .

ونلاحظ أننا لا نسير دائماً بهذا التفصيل ، ولكن نعرض هنا الاستراتيجية التى نتبعها ، وندلل على الشرعية المنطقية على ما نقوم به .

ملاحظات :

١ - إذا كانت (ق ⟵ ك) عبارة صادقة فإننا نكتب ق ⟸ ك.

٢ - يمكن كتابة البرهان السابق كما يلى :

($\hat{أ}$ قائمة . أ $\hat{ء}$ ب قائمة) ⟸ ($\hat{١}$ تتمم $\hat{٣}$ ، $\hat{٣}$ تتمم $\hat{٢}$) خواص اقليدية

⟸ ($\hat{١}$ = $\hat{٢}$) نظرية اقليدية

وإذن $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ (نعنى هنا $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ عبارة صادقة) .

٣ - الطريقـة التاليـة - يستـخدمـها التـلاميـذ عادة - طريقـة سليـمة ، وتعتمد ضمناً علي المنطق الذى أوضحناه :

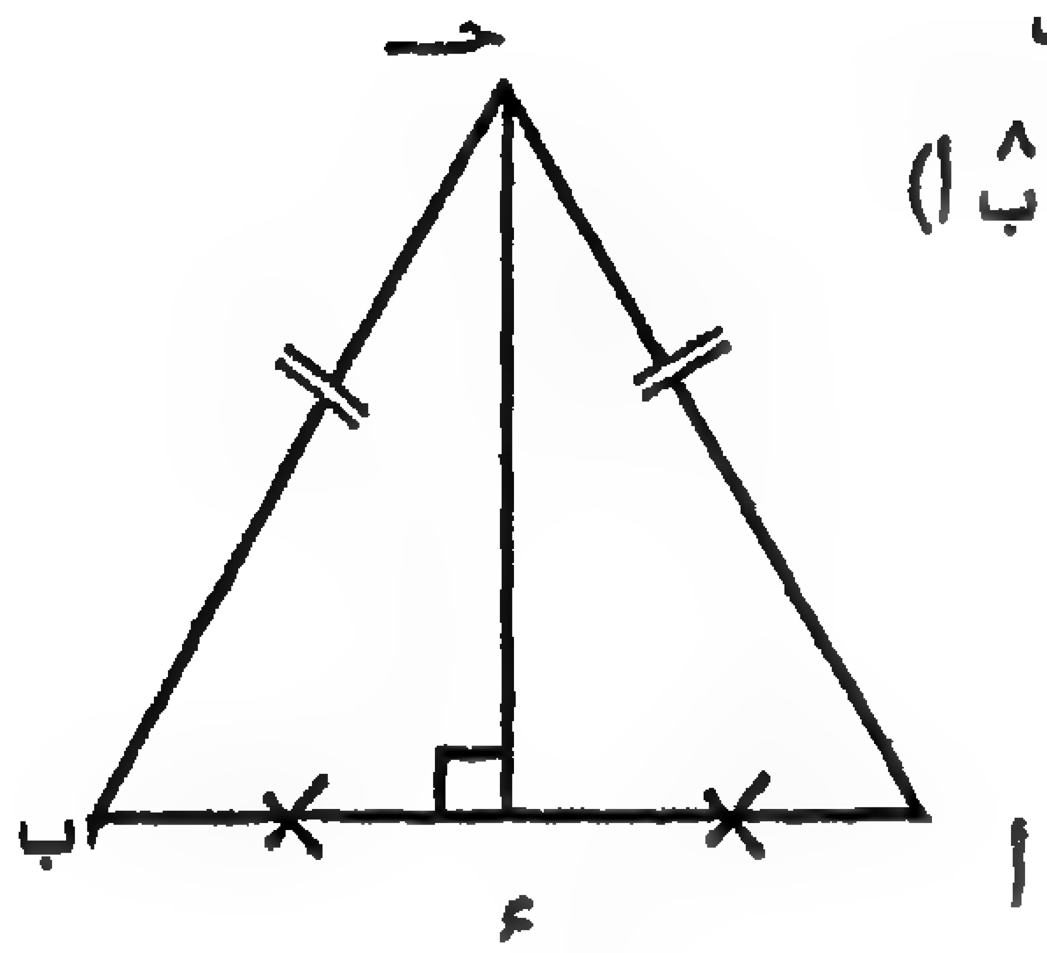
حيث أن أ̂ ء ب قائمة (معطيات)   إذن ١̂ تتمم ٣̂   (١)

حيث أن ١̂   قائمة (معطيات)   إذن ٣̂ تتمم ٢̂   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ١̂ = ٢̂ .

نظريــة :

مقياسا زاويتى قاعدة المثلث المتساوي الساقين متساويان .



المعطيات : المثلث حـ أ ب فيه حـ أ = حـ ب

المطلــوب : إثبات أ ن م (حـ أ̂ ب) = م (حـ ب̂ أ)

العمــــل : ننصف أ ب فى د ونصل حـ د

البرهــان : فى Δ حـ أ ب :

(١) حـ أ = حـ ب   (١) معطيات

(٢) أ ء = ب ء   (٢) بالعمل

(٣) حـ ء = حـ ء   (٣) خاصيــة الانعكاس لعلاقـة التســاوي (ضلع مشترك)

(٤) إذن : Δ حـ ب د ≅ Δ حـ أ د   (٤) مسلمة (تساوى الأضلاع المتناظرة)

(٥) إذن : م (حـ ب̂ د) = م (حـ أ̂ د)   (٥) أجزاء متناظرة فى مثلثين منطبقين

البرهان السابق ينقصه برهنــة صحــة العمل . أى برهنة وجود نقطة د بين أ ب ، وبالتالى برهنة وجود حـ د . وفيما يلى البرهان بصورة سليمة من وجهة نظر المنطق :

للبرهان :

(١) Δ حـ أ ب   فيه حـ ب = حـ أ   (١) معطيات

(٢) توجد نقطة بين أ ، ب ولتكن د بحيث أ د = ب د	(٢) مسلمتا البينية والتصنيف
(٣) يوجد خط وحيد يمر بالنقطتين حـ ، د	(٣) مسلمة
(٤) حـ د = حـ د	(٤) خاصية الانعكاس للتساوى
(٥) فى المثلثين أ د حـ ، ب د حـ : إذا كان أ حـ = ب حـ ، حـ د = حـ د ، أ د = ب د فإن Δ أ د حـ = Δ ب د حـ	(٥) مسلمه
(٦) إذن : Δ أ د حـ = Δ ب د حـ	(٦) إستنتاجاً من الخطوات (١) : (٥)
(٧) ينطبق المثلثان إذا ، وإذا فقط تساوي مقياسا كل جزئين متناظرين فيهما .	(٧) مسلمه
(٨) إذن م (حـ أ̂ د) = م (حـ بَ̂ د)	(٨) إستنتاجاً من خطوتى (٦)، (٧)
(٩) وحيث أن د نقطة على أ ب فإن : م(حـ أ̂ د) = م (حـ أ̂ ب) ، م (حـ ب̂ د) = م (حـ ب̂ أ)	(٩) إستنتاجاً من (٢) ، (٣)
(١٠) إذن : م(حـ أ̂ ب) = م (حـ ب̂ أ)	(١٠) من (٨) ، (٩) وخاصية الانتقال والتساوي

بهذه الصورة يكون البرهان كاملاً وسليماً من وجهة نظر المنطق ونلاحظ أننا طبقنا قاعدة الاستنتاج . أ ، أ ← ب
ب

مرتين : الأولى لاستنتاج الخطوة (٦) ؛ والثانية لاستنتاج الخطوة (١٠) .

والخطوة (٣) تبرهن صواب أن حـ د خط وحيد لئلا يكون هناك شك بوجود خطين ، فتتغير تبعاً لذلك العلاقات فى النظرية .

أما الخطوة (٥) ، فتؤكد أن الخطوات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) إنما تؤدى إلى الخطوة (٦) . حيث أن كلا من الخطوات (١) ، (٢)، (٣) ، (٤)، (٥) صواب ، فإن الخطوة (٦) تكون هى الأخرى صواب[1] .

وفى الخطوة (١٠) : نجد أن الخطوة (٧) تبرهن صواب استنتاج الخطوة (٨) من الخطوة (٦) . والخطوة (٩) تبرهن استنتاج الخطوة (١٠) من الخطوة (٨) .

ونلاحظ من البرهان أننا نعتمد على المعطيات كما هى ، ونحاول عن طريق تطبيق قواعد الاستنتاج والتعويض والتعميم ، برهنة صواب استنتاج المطلوب .

ثانياً : البرهان غير المباشر :

فى هذا النوع من البرهان ، نتعامل مع مطلوب مكافئ للمطلوب الأصلى ، أى أننا نصل إلي صحة المطلوب بطريقة غير مباشرة . وفى هذا المجال ، قد نستخدم الأساليب التالية :

١ - مبدأ عدم التعارض :

إذ طلب إثبات صحة العبارة ك مثلاً ، ففى هذه الطريقة نسير كالآتى :

نفترض صحة نفى ق (~ ك) ، ونثبت أن هذا الافتراض يؤدى إلى تعارض (أو تناقض) مع المعطيات ، أو مع إحدى حقائق النظام الذى نعمل فيه . وحيث أن التعارض أمر مرفوض فى المنطق ، فإننا نرفض صحة نفى ك .

وهذا إثبات لصحة ك ، إذ إن ~ (~ ق) $\equiv$ ق

مثال :

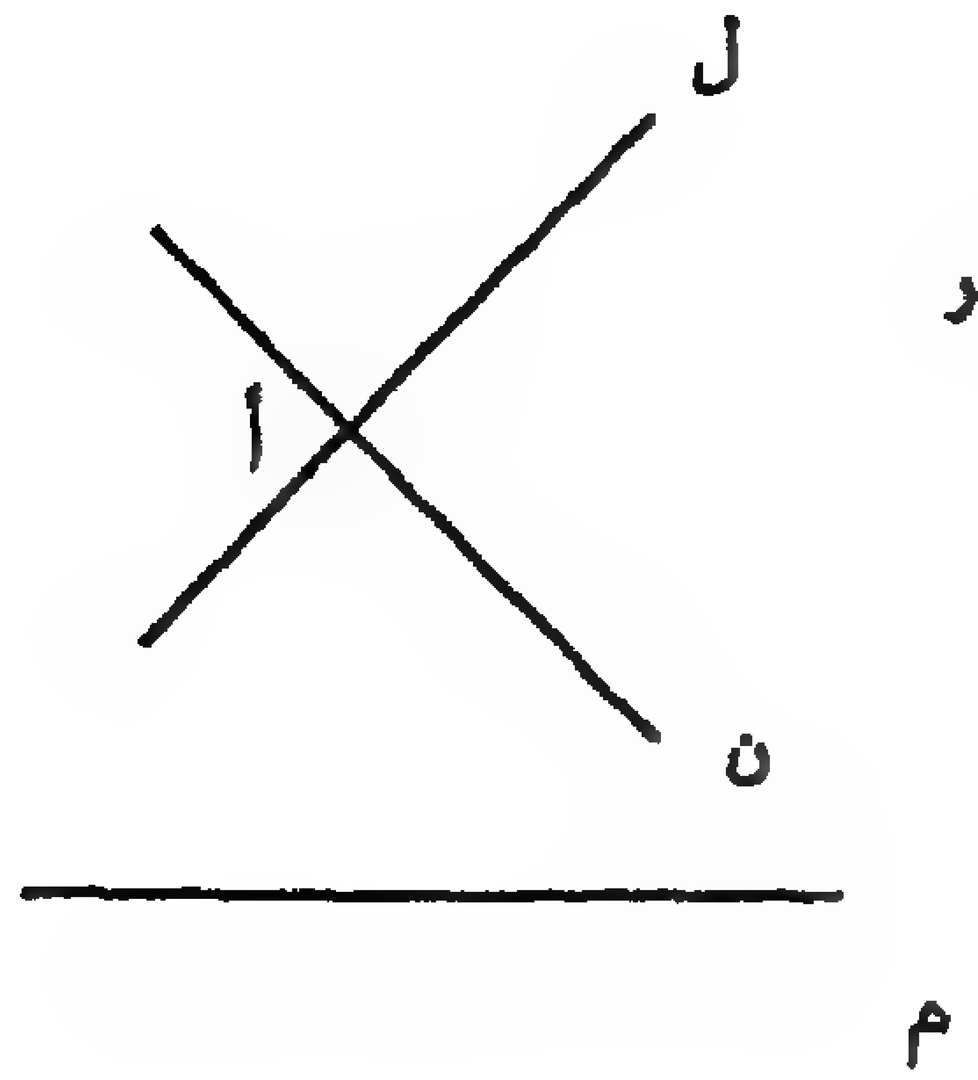
إذا كان ل // م ، م // ن حيث ل ، م ، ن ثلاثة مستقيمات فى المستوى ، إثبت أن ل //ن .

البرهان :

نفرض أن ل لا يوازى ن

---

(١) د. محمود أحمد شوق : الاتجاهات الحديثة فى تدريس الرياضيات ، الرياض : مطبوعات جامعة الرياض ، (د.ت) .



إذن ل ، ن يتقاطعان فى نقطة ولتكن أ .

إذن من نقطة معلومة (أ) أمكن رسم أكثر من مستقيم يوازى مستقيماً معلوماً .

وهذا يتناقض مع مسلمه التوازى المعروفة .

وإذن ، ليس صحيحاً أن "ل لايوازى ن"

إذن ل // ن

مثـال :

المعطيات : ق ، (ر ⟵ ~ ق) ، (~ و ⟵ ك) عبارات صادقة .

المطلوب : إثبات أن ك عبارة صادقة .

البرهان : نفرض أن ~ ك عبارة صادقة .

نعلم أن : (~ ر ⟵ ك) ⟸ ~ ك ⟵ ر

[(~ ك ⟵ ر) ∧ ~ ك] ⟸ ر

[(ر ⟵ ~ ق) ∧ ر] ⟸ ~ ق

وإذن (~ ق) عبارة صادقة .

وهذا تناقض مع المعطيات التى تتضمن أن ق صادقة .

وإذن الإفتراض أن (~ك) صادقة إفتراض خاطئ .

وإذن (ك) صادقة .

مثـال :

اثبت $\sqrt{٢}$ عدد غير قياسى

البرهان :

نفترض أن $\sqrt{٢}$ عدد قياسى (١)

إذن $\sqrt{٢} = \frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، وليس بينهما عامل مشترك ، ب ≠ الصفر (٢)

إذن $٢ = \frac{أ^٢}{ب^٢}$ (٣) تربيع الطرفين ، خواص الأعداد الصحيحة

إذن $أ^٢ = ٢ب^٢$ (٤) علاقة تساوى الأعداد القياسية.

إذن $أ^٢$ عدد زوجى (٥) من (٤) وخواص الأعداد الطبيعية .

إذن أ عدد زوجى (٦) خواص الأعداد الطبيعية.

إذن أ = ٢س (٧) من (٦) وخواص الأعداد الطبيعية .

إذن $أ^٢ = ٤ س^٢$ (٨) تربيع الطرفين وخواص الأعداد الطبيعية

إذن $٢ب^٢ = ٤س^٢$ (٩) من (٤)، (٨) وخاصية الانتقال لتساوى الأعداد الطبيعية .

إذن $ب^٢ = ٢س^٢$ (١٠) خاصية الحذف فى ضرب الأعداد الطبيعية .

إذن $ب^٢$ عدد زوجى (١١) من (١٠) وخواص الأعداد الطبيعية .

إذن ب عدد زوجى (١٢) من (١١) وخواص الأعداد الطبيعية .

إذن كل من أ ، ب عدد زوجى (١٣) من (٦) ، (١٢) .

إذن أ ، ب بينهما عامل مشترك (١٤) من (١٣) .

إذا فرضنا أن التقرير حـ هو :

حـ : أ ، ب عامل مشترك ، وهو التقرير الذى وصلنا إليه فى (١٤) .

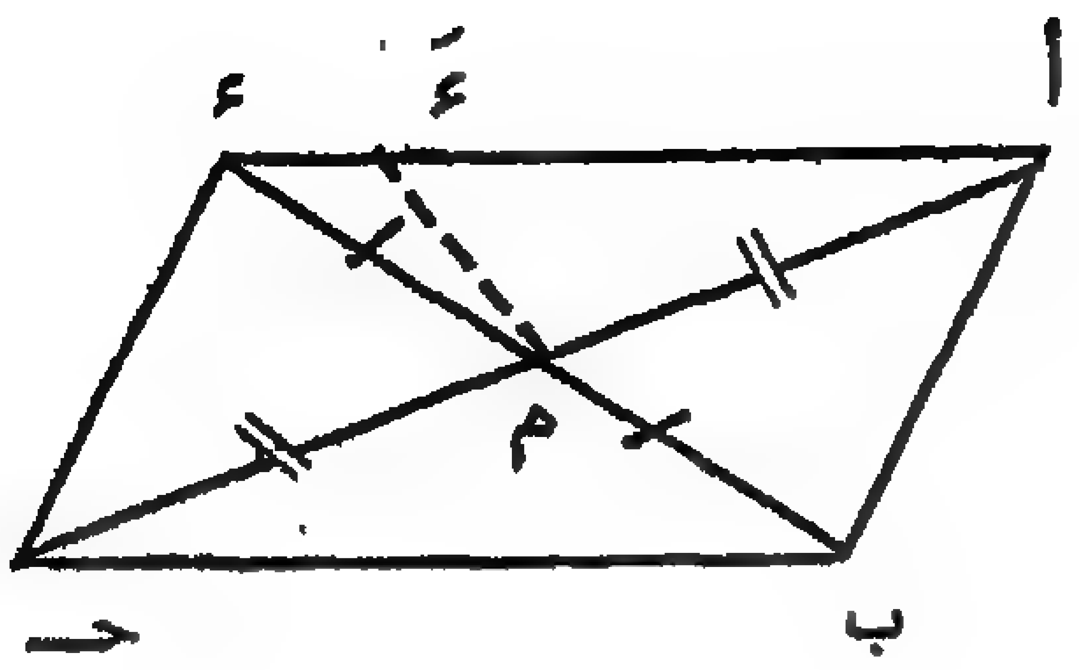
إذن : (~ حـ) هو التقرير .

~ حـ : أ ، ب ليس بينهما عامل مشترك ، وهو التقرير الذي إفترضنا صحته، وبذلك فإننا وصلنا إلى الحالة (حـ ٧ ~ حـ) .

فقد وصلنا إلى حـ برهاناً . والاعتماد على أن (~حـ) صواب .

وبناء على التعارض فإننا نستنتج أن : $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي .

مثـال :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع . أثبت أن القطرين أحـ ، ب ء ينصف كل منهما الآخر.

المعطيات : أ ب حـ ء متوازى أضلاع .

المطلوب : إثبات أن أحـ ، ب ء ينصف كل منهما الآخر.

البرهان :

ننصف أحـ فى م	(١) مسلمة
نصل ب ، م	(٢) مسلمة
نمد ب م إلى ءَ بحيث :	
ب م = م ءَ	(٣) مسلمة

ينبغى أن يلاحظ القارئ أننا فى الخطوة (٣) من البرهان قد افترضنا أن ب م ≠ ء م ، وقد عملنا عملاً لنحصل على ء / بحيث ب م = ء/م ، وبذلك فإننا افترضنا أن :

[~ (أ ← ب)] أو أ ∧ ~ ب

ونعنى : أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، وليس صحيحاً أن أحـ ، ب ء ينصف كل منهما الآخر ، وفيما يلى نكمل البرهان :

فى المثلثين أ م ءَ ، حـ م ب :

أ م = حـ م	(٤) بالتصنيف
م (أ م̂ ءَ) = م (حـ م̂ ب)	(٥) بالتقابل بالرأس
ب م = ءَ م	(٦) من (٣)

Δ أ م ءَ ≅ Δ حـ م ب	(٧) من (٤) ؛ (٥)، (٦)
م (م أ̂ ءَ) = م (م حـ̂ ب)	(٨) من (٧)
ولكن : م (م أ̂ ء) = م (م حـ̂ ب)	(٩) بالتبادل ؛ وخواص متوازى الأضلاع
أءَ // ب حـ	(١٠) من (٨)
ولكن أ ء // ب حـ	(١١) خواص متوزى الأضلاع
إذن أ ءَ // ب حـ ، أ ء // ب حـ	(١٢) من ١٠ ، (١١) .

لكن هذا يتعارض مع المسلمة التى مؤداها أنه إذا كـان مستقيم ونقطة فى مستوى واحد ، فإنه لا يمكن رسم أكثر من مستقيم واحـد يمر بهذه النقطة ، ويوازى ذلك المستقيم .

أ ءَ ينطبق على أ ء وبذلك تقع ءَ على أ ء	(١٣) من (١٢) والتعارض .
فى المثلثين أ م ب ؛ حـ م ءَ	
حـ م = أ م	(١٤) بالتنصيف
م ب = م ءَ	(١٥) من (٣)
م (حـ م̂ ءَ) = م (أ م̂ ب)	(١٦) بالتقابل بالرأس
Δ حـ م ءَ ≅ Δ أ م ب	(١٧) من (١٤) ، (١٥) ، (١٦)
م (م ءَ̂ حـ) = م (م ب̂ أ)	(١٨) من (١٧)
م ءَ̂ حـ ، م ب̂ أ متبادلان	(١٩) تعريف الزوايا المتبادلة
حـ ءَ // أ ب	(٢٠) من (١٩) ونظرية
ولكن : حـ ء // أ ب	(٢١) خواص متوازى الأضلاع
حـ ءَ // أ ب ، حـ ء // أ ب	(٢٢) من (٢٠) ، (٢١)

وهنا نجد تعارضا مرة أخرى لنفس المسلمة :

حـ ءَ ينطبق على حـ ء ، ءَ تقع على حـ ء	(٢٣) من التعارض

ءَ نقطة تقاطع $\overline{أ ء}$ ، $\overline{حـ د}$	(٢٤) من (١٣) ، (٢٣) مسلمة
ءَ تقع على ء	(٢٥) من (٢٤) وتعريف تقاطع مستقيمين
$\overline{ء م}$ = $\overline{ب م}$	(٢٦) من (٣) ، (٢٥)
م تنصف كل من $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$	(٢٧) من (١) ، (٢٦)

٢ - استنفاد الإمكانات الأخرى :

قد يمثل المطلوب واحد من عدد محدود من الإمكانات ، عندئذ يمكن إثبات صحة المطلوب ، عن طريق إثبات إستحالة الإمكانات الأخرى ، فإذا كان المطلوب هو ك وكل الامكانات الأخرى للموقف هي ن ، ر ، م فإن ذلك يمثل عبارة مركبة مفصلية بالصورة (ك٧ ر ٧ م ٧ ن) .

فإذا أثبتنا عدم صحة ر ، م ، ن أي أثبتنا ~ ر ، ~ م ، ~ ن فإننا نكون بذلك أثبتنا صحة ك ، وذلك استنادا علي التوتولوجية .

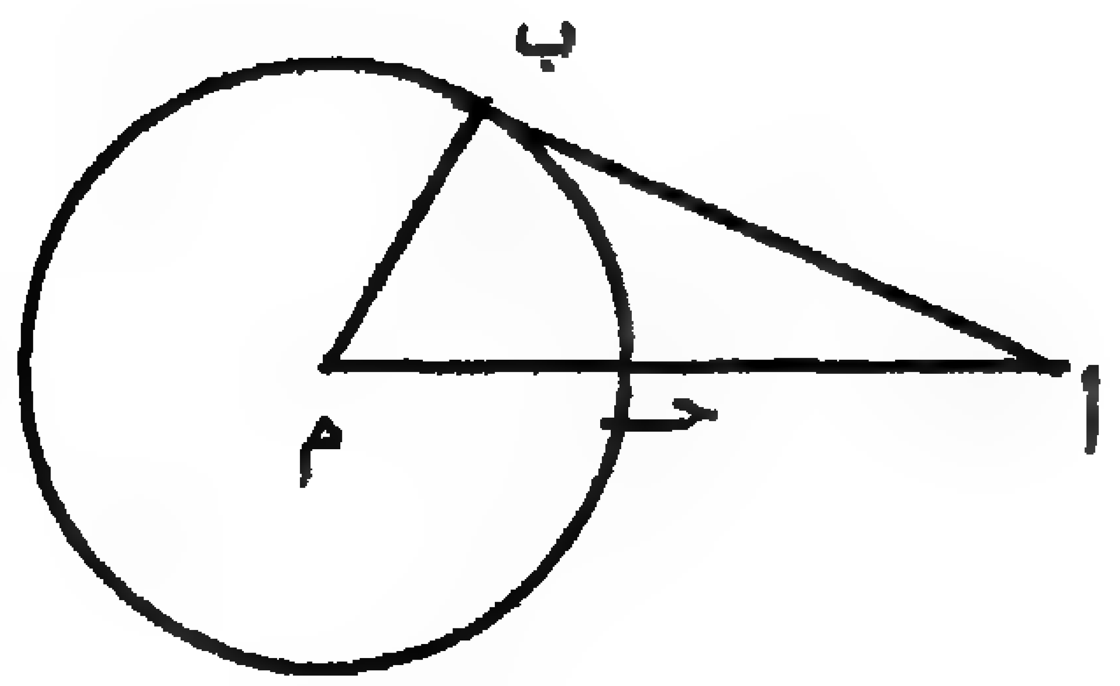
(٧ ر ٧ م ٧ ن) ٨ (~ ر ٨ ~ م ٨ ~ ن) ⟵ ك

مثال :

إثبت أن أقصر مسافة من نقطة خارج دائرة إلى محيط الدائرة هي طول القطعة المستقيمة التي امتدادها يمر بمركز الدائرة .

المعطيات :

أ نقطة خارج الدائرة م ، حـ نقطة تقاطع أ م مع محيط الدائرة ؛ ب أي نقطة أخرى على الدائرة .



المطلوب :

إثبات أن أ حـ < أ ب

البرهان :

$\overline{أ حـ}$ < $\overline{أ ب}$ (١)

أ حـ = أ ب . (٢)

أ حـ > أ ب (٣)

نفرض أن أ حـ = أ ب

إذن أ حـ + جـ م = أ ب + ب م (لماذا ؟ ؛ جـ م ، ب م أنصاف أقطار)

إذن أ م = أ ب + ب م

أى أن طول ضلع فى المثلث أ ب م يساوى مجموع طولى الضلعين الآخرين وهذا يتناقض مع النظرية المعروفة .

إذن أ جـ ≠ أ ب

نفرض أن أ حـ > أ ب

إذن أ حـ + حـ م > أ ب + ب م

إذن أ م > أ ب + ب م

إذن يوجد ضلع فى المثلث أ ب م أطول من مجموع طولى ضلعين فيه . وهذا أيضاً يتناقض مع النظرية المعروفة .

إذن أ حـ ≯ أ ب

حيث أنه ثبت صحة (٢) . (٣)

إذن (١) صادقة .

وإذن أ حـ < أ ب

مثـــال :

برهن أنه فى الدائرة الواحدة الوتر الأكبر يكون أقرب لمركز الدائرة .

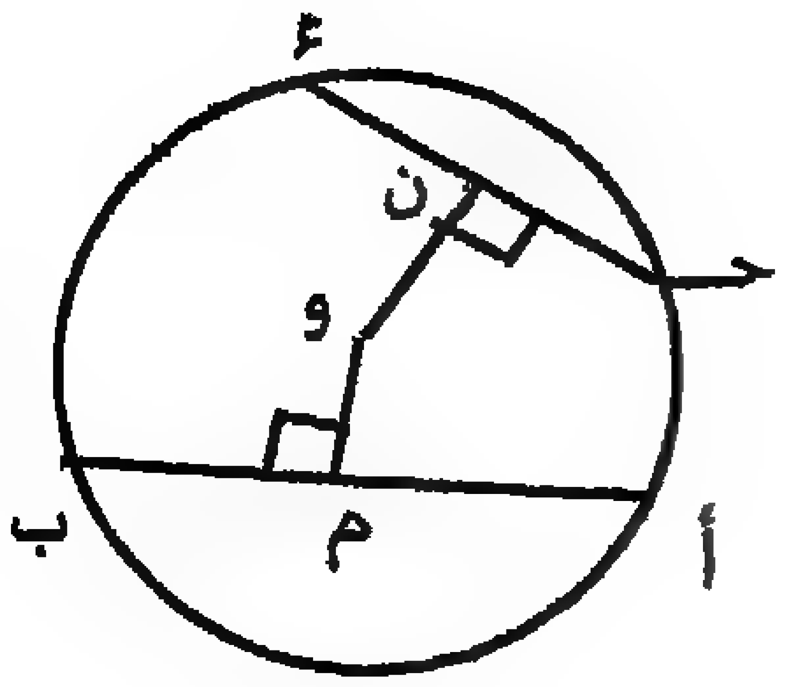
المعطيات : و دائرة ، أ ب ، حـ د وتران فيهما ، بحيث أ ب > جـ د .

المطلوب : إثبات أن : و م < و ن

ويمكن التعبير عن المطلوب بالصورة الآتية .

أ ⟵ ب : (أ ب > حـ ء) ⟵ (و م < و ن)

حيث :



أ : أ ب > جـ ء ؛ ب . و م < و ن

البرهـــان :

الخطوة الأولى هى تحديد النتيجة المراد برهنة صوابها . وكذلك جميع الإحتمالات الأخرى . وفى هذه الحالة . هناك ثلاث إحتمالات فقط . سنرمز لها بالرمز ب ، حـ ، ء .

فإذا فرضنا أن ب هى التقرير المراد برهنة صوابه وأن حـ . ء هى الإحتمالات الأخرى . فإنه يمكن التعبير عن كل منهما كالآتى :

ب . و م < و ن   حـ . و ن = و ن   ؛   ء . و م > و ن

ومن ثم :

أ ⟵ (ب V حـ V ء)

أى أن :

(أ ب > حـ ء) ⟵[(و م < و ن) V (و م = و ن) V (و م > و ن)]

والخطوة الثانية هى أن جميع الإحتمالات ماعدا الإحتمال الذى نريد برهنة صوابه . تقود إلى تعارض . وهو ما سنعالجه فى الآتى :

أولاً : (أ ٨ حـ) ⟵ ~ أ

وذلك لأن :

(و م = و ن) ⟵(أ ب = حـ ء) وهذا يعني أن أ ب > حـ ء . وهذا تعارض فى الصورة (أ ٨ ~ أ) . إذ إن المعطيات أ ب > حـ ء .

وفى احتمال (أ ٨ حـ) استطعنا أن نبرهن أن : أ ب = حـ ء . أى أننا استطعنا أن نبرهن (~ أ) . وبذلك أصبح (أ ٨ ~أ) : أ من المعطيات . ~ أ برهاناً . أى أننا وصلنا إلى خطأ التقرير (أ ٨ ~ أ) . وبناء على هذا التعارض . نحذف إحتمال أن : و م = و ن .

ثانياً : (أ ∧ ء) ⟵ ~ أ

وذلك لأن :

(و م > و ن) ⟵ (أ ب < حـ ء)

وهذا يؤدى أيضاً إلى تعارض فى صورة (أ ∧ ~ أ) . وبناء على هذا التعارض نحذف احتمال أن : و م < و ن .

بحذف الإحتمالين اللذين يقودان إلى تعارض ، تبقى الحالة المطلوب برهنة صوابها ، فتكون صواباً بالضرورة . أى أننا برهنا صواب التقرير الآتى :

أ ⟵ ب : (أ ب >حـ ء) ⟵ (و م < و ن)

٣ - استخدام عكس النقيض :

قد يطلب إثبات صحة عبارة شرطية ق ⟵ ك . وفى هذه الحالة يصبح أمراً مشروعاً منطقياً إذا أثبتنا بدلاً منها ، عكس نقيضها ، أى اثبتنا صحة العبارة (~ ك ⟵ ~ ق) . وذلك لأن العبارتين متكافئتين منطقياً .

مثال :

إذا كانت ϕ هى الفئة الخالية ، وكانت س أية فئة فاثبت أن $\phi \subset$ س .

البرهان :

$\phi \not\subset$ س ⟸ يوجد عنصر أ $\ni$ ϕ بحيث أن أ $\not\ni$ س

⟸ يوجد أ $\ni$ ϕ

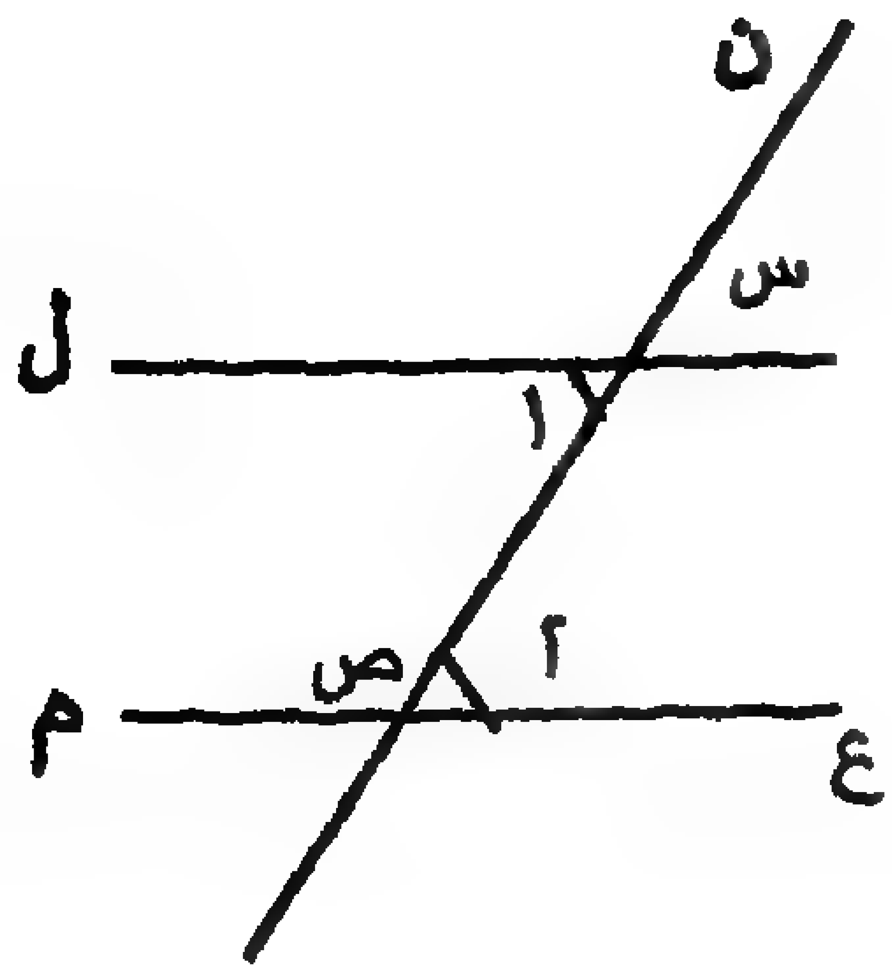
⟸ ϕ ليست الفئة الخالية .

ومعنى ذلك أننا أثبتنا العبارة :

إذا كانت ϕ ليست فئة جزئية من س ، فإن ϕ لا تكون الفئة الخالية .

مثال :

إثبت أنه إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزوايا المتبادلة متساوية ، فإن المستقيمين يكونان متوازين .



المعطيات : ن يقطع ل ، م

المطلوب : إثبات أن $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ ⟸ ل // م

(أى أن $\hat{١}$ = $\hat{٢}$ ⟵ ل // م عبارة صادقة)

البرهـــان :

باستخدام عكس النقيض ، يصبح : المطلوب هنا :

ل لا يوازى م ⟸ $\hat{١} \neq \hat{٢}$

ل لا يوازى م ⟸ $\hat{١}$ خارجة عن المثث س ص ع

⟸ $\hat{١}$ > $\hat{٢}$

⟸ $\hat{١} \neq \hat{٢}$

مثـــال :

إذا فرضنا أن لدينا التقرير الآتى :

لـكـل (س$_1$ ، س$_2$) : إذا كـان س$_1$ عـدداً موجـباً ؛ س$_2$ عـدداً سـالـباً فإن (س$_1$ + س$_2$) يكـون عـدداً مـوجبـاً . هـذا تقرير مؤداه أنه فى جـميع الحـالات إذا كـان هـناك عددين ، أحدهما موجب والثانى سـالب . فإن مجموعهما يكون موجباً .

ويمكن ترجمة هذا التقرير فى الصورة الآتية

أ : س$_1$ عدد موجب س$_2$ عدد سالب

ب : (س$_1$ + س$_2$) عدد موجب

∀ س$_1$ ، س$_2$: كل من س$_1$ ، س$_2$

∀ س$_1$ ، س$_2$ أ ⟵ ب : لكـل س$_1$ ، س$_2$: إذا كـان س$_1$ عدد مـوجب ، س$_2$ عـدد سالب فإن (س$_1$ + س$_2$) يكون عدداً موجباً .

فيمـا يلى سنعطى مثالاً واحداً يكون فـيها س$_1$ ، س$_2$ عـددين بحـيث يكون س$_1$ موجب ، س$_2$ سالـب ، ولكن (س$_1$ + س$_2$) ليس عدداً موجباً ، فإذا كانت :

$س_1 = 7$ وهو عدد موجب ، $س_2 = -11$ وهو عدد سالب

فإن : $س_1 + س_2 = -4$ وهو ليس عددا موجباً

هذا المثال يكفى لبرهنة عدم صواب التقرير :

لكل $(س_1 + س_2)$ إذا كان $س_1$ ، $س_2$ عددين بحيث $س_1$ موجب ، $س_2$ سالب فإن $(س_1 + س_2)$ يكون عدداً موجباً .

وما أثبتناه بهذا المثال ، هو :

يوجد عددان $س_1$ ، $س_2$ بحيث إذا كان $س_1$ موجب ، $س_2$ سالب فإن $(س_1 + س_2)$ لايكون عدداً موجباً ، أى أننا أثبتنا أنه يوجد

$(س_1 ، س_2)$ بحيث $[\sim (أ \longrightarrow ب)]$

مثــال :

لكل ن : عدد صحيح موجب فإن $(ن^2 - ن + 41)$ يكون عدداً أولياً .

ولكى نبرهن أن هذا التقرير ليس صواباً نضع ن + 41 فنجد أن الناتج = $(41)^2$، وذلك عدد ليس أوليا : وهذا المثال الوحيد يعتبر كافياً لإثبات أنه توجد ن عدد صحيح موجب ، $(ن^2 - ن + 41)$ ، ليس عدداً أولياً . وهذا يبرهن عدم صواب التقرير ، بالرغم من أن ن = 1، 2، 3، ..... 40 تعطى عدداً أولياً .

مثــال :

إذا كانت $أ^2$ عدد زوجى فإن أ عدد زوجى .

البرهــان :

بفرض أن أ عدد فردى

بوضع أ = 2 ن + 1 حيث ن عدد كلى ، أى ن $\in$ {0 ، 1، 2، 3، ...}

إذن $أ^2 = (2ن + 1)^2$

$= 4ن^2 + 4ن + 1$

= (٤ن^{٢} + ٤ن) +١

= عدد زوجى + ١

= عدد فردى

ومعنى ذلك أن أ^{٢} عدد فردى ، وهذا يناقض المعطيات .

إذن أ عدد زوجى

ثالثاً : البرهان بإستخدام الاستنتاج الرياضى :

يستخدم الاستنتاج الرياضى لإثبات صحة عبارات تتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة . والاستنتاج الرياضى يمثل برهاناً رياضياً ، وليس مجرد إقناع يعتمد على الاستقراء من حالات خاصة ، وفى الاستنتاج الرياضى ، يطلب إثبات صحة عبارة ق$_{ن}$ لجميع قيم ن الصحيحة الموجبة (أو من نقطة بداية معينة أ)

تتضمن استراتيجية البرهان هنا تحركين أساسين :

(أ) التحقق من صحة العبارة عند نقطة البداية ، أي نثبت صحة ق$_{١}$.

(ب) البرهان على صحة التحرك تتابعيا من نقطة ر إلى النقطة التى تليها ر + ١ ، أى إثبات صحة العبارة الشرطية (ق$_{ر}$ ← ق$_{ر+١}$ حيث ر≤ أ) .

وبإعتبار أن ق$_{ر}$ هى فى الحقيقة تعبير عن متتابعة لا نهائية ق$_{١}$ ، ق$_{١}$ + ١ ، .....

فإن الاستنتاج الرياضى يعتمد على الصورة التالية :

[ق$_{ر}$ ← ق$_{ر+١}$) ∧ ق أ] ← ق$_{ن}$

وهي صورة تكافئ الصورة التوتولجية :

[(ق ← ك) ∧ ق] ← ك

أمثلة :

١ - لحساب مجموع (ن) من الأعداد الفردية الأولية ، أى لحساب :

ح$_{ن}$ = ١ + ٣ + ٥ ..... + (٢ن -١) .

بإستخدام طريقة الاستنتاج الرياضى دون اللجوء إلى علاقات جاهزة ، نحاول تخمين الجواب بإعطاء (ن) القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ... على التوالى ، إلى أن تحصل على مادة كافية يمكن على أساسها تكوين فرض مضمون صحته بعض الشيء ، على أن يتم التحقق منه بعد ذلك بخطوات الاستنتاج الرياضى ، والتى تسير كما يلى :

$ح_١ = ١ = (١)^٢$

$ح_٢ = ٤ = (٢)^٢$

$ح_٣ = ٩ = (٣)^٢$

$ح_٤ = ١٦ = (٤)^٢$

$ح_٥ = ٢٥ = (٥)^٢$

$ح_٦ = ٣٦ = (٦)^٢$

وعلى ذلك ، يكون $ح_ن = ن^٢$

نثبت أن هذا الفرض صحيح :

* عند ن = ١ يكون المجموع عبارة عن حد واحد يساوى الواحد الصحيح . والصيغة $ن^٢$ عندما ن = ١ تساوى أيضاً الواحد الصحيح . وهذا يعنى أن الفرض صحيح عندما ن = ١ .

* نفرض أن الفرض صحيح عندما ن = م ، أى أن : $ح_م = م^٢$.

والآن نحاول إثبات أن هذا الفرض يجب أن يكون أيضاً صحيحاً عند ن = م + ١ ، أى نحاول إثبات :

$ح_{م+١} = (م + ١)^٢$

وذلك على النحو التالى :

حيث $ح_{م+١} = ح_م + (٢ م + ١)$

ولكن $ح_م = م^٢$

إذن : $\text{ح}_{\text{م}+١} = \text{م}^٢ + (٢\text{م}+١) = (\text{م}+١)^٢$

وهو المطلوب إثباته .

٢ - لإثبات أن : عند أي عدد طبيعى $\text{ن} > ١$ يكون :

$$\frac{١}{\text{ن}+١} + \frac{١}{\text{ن}+٢} + \ldots\ldots + \frac{١}{٢\text{ن}} > \frac{١٣}{٢٤}$$

نرمز إلي الطرف الأيمن للمتباينة $\text{ح}_{\text{ن}}$

* عند $\text{ن} = ٢$ ، $\text{ح}_٢ = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} = \frac{٧}{١٢} = \frac{١٤}{٢٤}$

إذن المتباينة صحيحة عند $\text{ن} = ٢$

* نفرض أن $\text{ح}_{\text{م}} > \frac{١٣}{٢٤}$ عند أى عدد م .

ونحاول إثبات أن $\text{ح}_{\text{م}+١}$ يكون أيضاً أكبر من $\frac{١٣}{٢٤}$. وذلك على النحو التالى :

حيث : $\text{ح}_{\text{م}} = \frac{١}{\text{م}+١} + \frac{١}{\text{م}+٢} + \ldots\ldots + \frac{١}{٢\text{م}}$ (١)

إذن : $\text{ح}_{\text{م}+١} = \frac{١}{\text{م}+٢} + \frac{١}{\text{م}+٣}$

$+ \ldots\ldots + \frac{١}{٢\text{م}} + \frac{١}{٢\text{م}+١} + \frac{١}{٢\text{م}+٢}$ (٢)

نطرح (١) من (٢) نحصل على :

$$\text{ح}_{\text{م}+١} - \text{ح}_{\text{م}} = \frac{١}{٢\text{م}+١} + \frac{١}{٢\text{م}+٢} - \frac{١}{\text{م}+١}$$

$= \frac{١}{٢(\text{م}+١)(٢\text{م}+١)} >$ الصفر لكل م $>$ الصفر

إذن $\text{ح}_{\text{م}+١} > \text{ح}_{\text{م}}$

وحيث $ح_م > \frac{١٣}{٢٤}$

إذن $ح_{م+١} > \frac{١٣}{٢٤}$.

٣ - لإثبات أن : فى المتوالية العددية يكون : $ح_ن = أ + (ن - ١) د$.

حيث :

أ الحد الأول ، ن عدد حدود المتوالية ، د أساس المتوالية ، $ح_ن$ الحد النونى .

* عند ن = ١ يكون ح ١ = أ

إذن العلاقة صحيحة .

* نفرض أن العلاقة السابقة صحيحة عندما ن = م ، أى أن :

$ح_م = أ + (م - ١) د$

إذن $ح_{م+١} = ح_م + د = أ + (م - ١) د + د = أ + م د$

إذن العلاقة صحيحة أيضا عندما ن = م + ١ .

(٤) اثبت أن لكل عدد صحيح ن > ١ يكون $(١ + س)^ن > ١ + ن س$

البرهان :

(١) نقطة البداية : إثبات صحة $ق_٢$ (أى فى حالة ن = ٢)

$(١ + س)^٢ = ١ + ٢س + س^٢$

$> ١ + ٢س$ لأن $س^٢ > ٠$ (١)

(٢) الخطوة التابعة : إثبات صحة $ق_{ر+١} > ق_ر$

نفرض أن :

$(١ + س)^ر > ١ + ر س$ صحيحة

وحيث $(١ + س)^{ر+١} = (١ + س)^ر (١ + س)$

إذن $(١ + س)^{ر + ١} > (١ + ر س) (١ + س)$.

$> ١ + ر س + س + ر س^٢$

$> ١ + ر س + س$ لأن $ر س^٢ > ٠$ (٢)

$> ١ + (ر + ١) س$

وإذن :

$[(١ + س)^{ر + ١}] \Longleftarrow [(١+س)^{ر+١} \longrightarrow ١ + (ر + ١) س]$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$(١ + س)^ن > ١ + ن س$ لكل $ن > ١$

ملحوظة :

يمكن للطالب بإستخدام الإستنتاج الرياضى التحقق من صحة كل ما يلى :

(١) $١ + ٢ + ٣ ...$ إلى ن حدا $= \frac{١}{٢} ن(ن + ١)$.

(٢) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ...$ إلى ن حدا $= \frac{١}{٦} ن(ن + ١)(٢ن + ١)$.

(٣) إذا كانت $ن \leq ١$ فإن $٢^ن > ن$

(٤) $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ... + ن^٣ = (١ + ٢ + ٣ + ... + ن)^٢$

(٥) إذا كانت ن عدد طبيعى فإن :

$س^{٢ن + ١} + ص^{٢ن + ١}$ تقبل القسمة علي $(س + ص)$.

، $س^ن - ص^ن$ تقبل القسمة علي $(س - ص)$.

رابعاً : إثبات الشرط اللازم والكافى :

فى العبارة الشرطية ق ← ك : تسمى ق شرطا كافيا للعبارة ك ، وتسمي ك شرطا لازما العبارة ق .

وفى العبارة التبادلية (ق ⟷ ك) يسمي كل من ق ، ك شرطاً لازما وكافياً للآخر . وتقرأ العبارة المذكورة " ق إذا و فقط إذا ك " .

وإذا ما طلب إثبات عبارة بالصورة ق ⟷ ك ، فإننا نتحرك فى خطوتين :

١ - نثبت أن العبارة ق ⟵ ك صحيحة .

٢ - نثبت أن العبارة ك ⟵ ق صحيحة .

وهذا يثبت المطلوب استنادا على أن :

(ق ⟷ ك) ≡ (ق ⟵ ك) ∧ (ك ⟵ ق)

مثـــال :

إثبت أن " س = ٢ " ، شرط لازم وكـافى للمعادلة ٣ س + ١ = ٧ حـيث س عدد حقيقى .

البرهـــان :

(١) لإثبات أن س = ٢ شرط لازم للمعادلة :

٣ س + ١ = ٧ ⇐ ٣ س + ١ + (-١) = ٧ + (-١)

⇐ ٣ س = ٦

⇐ ١/٣ (٣س) = ١/٣ (٦)

⇐ س = ٢

(٢) لإثبات أن س = ٢ شرط كافى للمعادلة :

س = ٢ ⇐ ٣(س) = ٣ (٢)

⇐ ٣ س = ٦

⇐ ٣ س + ١ = ٦ + ١

⇐ ٣ س + ١ = ٧

مثـــال :

إثبت أن " المثلث يكون مـتساوى السـاقين إذا وفقط إذا كـانت زاويتا قـاعدته متساويتين " .

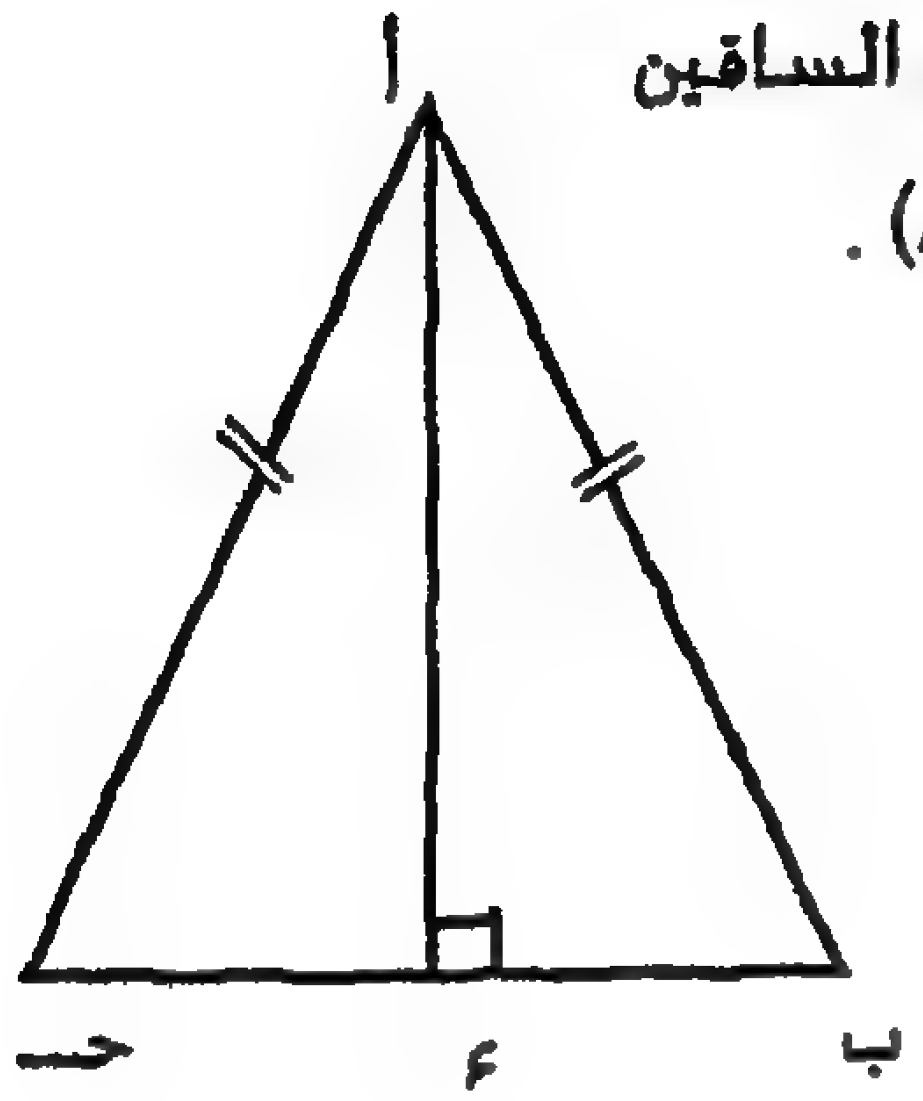
فكرة البرهان :

تتمثل فكرة البرهان فى تحقيق الخطوتين التاليتين :

١) نثبت أولاً أنه إذا كان المثلث متساوي الساقين فإن زاويتى القاعدة تتساويان وذلك كما يلى :

العمل : نسقط أ ء ⊥ ب حـ

البرهان :



حيث أ د ⊥ ب حـ فى المثلث أ ب حـ المتساوي الساقين

إذن ب ء = حـ ء (من خواص الهندسة الإقليدية) .

Δ Δ أ د ب ، أ د حـ فيهما :

أ ب = أ جـ (معطيات)

أ د مشترك

ب د = حـ د (من العمل)

إذن ينطبق المثلثان أ د ب ، أ د حـ

وينتج من التطابق م (أ $\hat{ب}$ د) = م (أ $\hat{حـ}$ د)

م (أ $\hat{ب}$ حـ) = م (أ $\hat{حـ}$ ب) (١)

٢ – نثبت ثانياً إذا كانت زاويتا قاعدة المثلث متساويتان . فإن المثلث يكون متساوى الساقين . وذلك كما يلى :

العمل : نسقط أ د ⊥ ب حـ

البرهان : حيث أن أ د ⊥ ب حـ

إذن م (أ $\hat{د}$ ب) = م (أ $\hat{د}$ حـ) = قائمة (من خواص الهندسة الإقليدية)

Δ Δ أ د ب ، أ د حـ فيهما :

أ د مشترك

م (أ $\hat{د}$ ب) = م (أ $\hat{د}$ حـ) (من العمل)

أ ب = أ حـ (معطيات)

إذن ينطبق المثلثان أدب ، أ دحـ ، وينتج من التطابق :

أ ب = أ حـ (٢)

من (١) ، (٢) يثبت صحة المطلوب ، وهو :

المثلث يكون متساوى الساقين إذا وفقط إذا كانت زاويتا قاعدته متساويتين .

خامساً : البرهان بإستنفاد جميع الحالات :

فى بعض العبارات التى تتعلق بنظام عدد عناصره محدود أو بموقف عدد إمكاناته محدودة ، فإننا يمكن أن نثبت صحة العبارة ، بأن نثبت صحتها فى جميع الحالات ، أو الامكانات التى تشملها هذه العبارة .

مثال :

اثبت أن العبارة (ق ٧ ~ ق) تحصيل حاصل

البرهان :

نكون جدولاً يتضمن جميع إمكانات الصدق لهذه العبارة كالآتى :

ق	~ ق	ق ٧ ~ ق
١	٠	١
٠	١	١

الجدول يثبت صدق العبارة (ق ٧ ~ ق) مهما كانت قيمة صدق العبارة ق ، وإذن فهى تحصيل حاصل ، أى (توتولوجى) .

مثال :

إذا كانت س = (٠ ، ١) وكانت (+ ، ×) عملية معرفة على س وتعنى الجمع مقياس ٢ ، إثبت أن الصفر عنصر محايد فى هذا النظام .

البرهان :

بدراسة جميع الحالات الممكنة في هذا النظام ، نجدها كما يلى :

٠ × ٠ = ٠ ، ١ × ٠ = ١ ، ٠ × ١ = ١

وحيث أنه لجميع الحالات أثبتنا أن ١ × ٠ = ١ ، ٠ × ١ = ١

إذن الصفر عنصر محايد .

مثـال :

إذا كانت س = (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣) وكـانت (+ ، ×) عملة معرفة على س ، وتعنى الجمع مقياس ٤ ، أثبت أن الصفر عنصر محايد فى هذا النظام .

البرهان :

الجدول الآتى يتضمن جميع حواصل الجمع فى العملية $\boxed{+}$ والفئة س

$\boxed{+}$	٠	١	٢	٣
٠	٠	١	٢	٣
١	١	٢	٣	٠
٢	٢	٣	٠	١
٣	٣	٠	١	٢

من الجدول يوجد عنصرمحايد فى الفئة س وهو (٠) حيث أن :

٠ $\boxed{+}$ ١ = ١ $\boxed{+}$ ٠ = ١ ، ٠ $\boxed{+}$ ٢ = ٢ $\boxed{+}$ ٠ = ٢ ، ٠

٠ $\boxed{+}$ ٣ = ٣ $\boxed{+}$ ٠ = ٣

سادساً : البرهان على وجود حل :

يطلب أحياناً إثبات وجود حل لمسألة معينة ، مثل إثبات وجود حل في حقل الأعداد القياسية للمعادلة أ س + ب = صفر حيث أ ≠ صفر ، [أ ، ب ∋ ق] ويكفى هنا إثبات أن $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ يحقق المعادلة ، وذلك بعد التدليل على أن $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ عدد

قياسى . والوصول إلى الحل عملية تحتاج إلى خبرة رياضية وهى بالنسبة للتلاميذ عملية ابتكارية بناءه فيها نوع من الاستثارة العقلية والدوافع الذاتية.

المثال :

اثبت أنه توجد دالة متصلة عند نقطة ولا تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة .

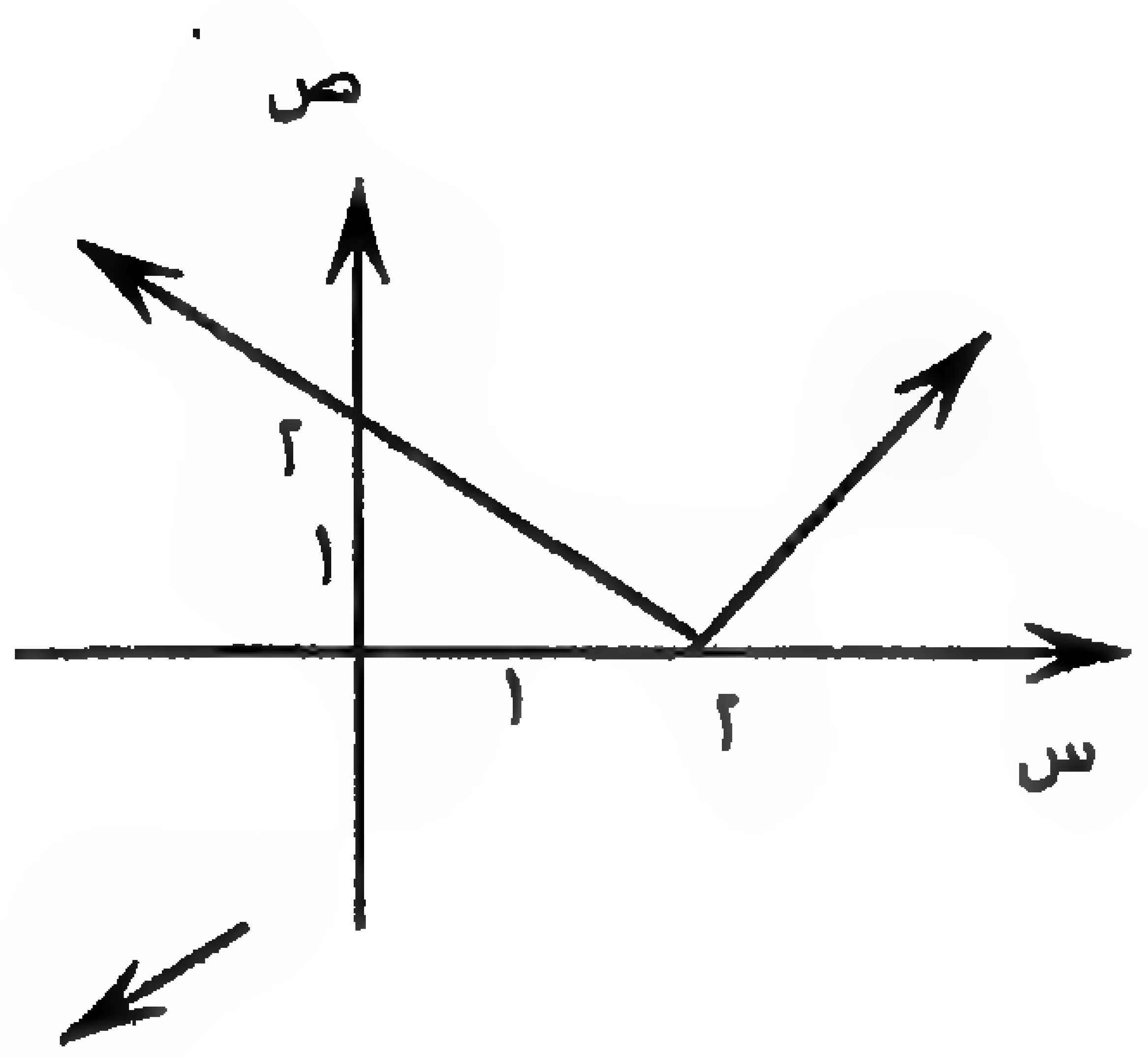
البرهان :

اعتبر الدالة التى قاعدتها د (س) = | س − ٢ |

د(س) = س − ٢ عندما س > ٢

= صفر عندما س = ٢

= ٢ − س عندما س < ٢



هذه الدالة متصلة عند س = ٢

بتطبيق تعريف المشتقة :

تأخذ هـ ← ٠ + ، هـ ← ٠ −

نهـا (هـ ← ٠ +) [د (٢ + هـ) − د (٢)] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠ +) [[٢ + (هـ −٢)] − ٠] / هـ = ١

نهـا (هـ ← ٠ −) [د (٢ − هـ) − د (٢)] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠ −) [[٢ − (٢ + هـ)] − ٠] / هـ = − ١

وحيث أن النهايتن مختلفتان فإن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق . ويتضح من هذا المثال أهمية الخبرة والمران ووضوح المفاهيم والترجمة الإجرائية لمصطلح "عدم قابلية الاشتقاق" للوصول إلى المطلوب .

سابعاً : إثبات عدم صحة عبارة ما :

قـد يطلب أحـيـاناً إثبات عـدم صحـة عـبـارة مـا . ويمكن أن يتم ذلك بأحـد طريقتين :

١ - إيجاد تعارض :

وذلك بأن نثبت أن صـحـة العبـارة يؤدى إلى تعارض ما بالنسـبـة للنظام الذى تنتمى إليـه العبارة . وحيث أن التعـارض مرفوض منطقيـاً . فإنه لابد وأن تكـون العبارة غير صحيحة .

مثـــال :

إثبت عدم صحة العبارة : يوجد عدد حقيقى ع بحيث $\frac{٣}{٠}$ = ع

البرهـــان :

نفترض صحة العبارة المذكورة :

إذن : $\frac{٣}{٠}$ = ع

∴ ع × ٠ = ٣ من تعريف القسمة .

وهذا يناقض خواص الضرب فى صفر، إذ إن ع × ٠ = ٠ لأى عدد حقيقى ع .

إذن العبارة المذكورة غير صحيحة .

٢ - إيجاد مثال مضاد :

وذلك بإيجاد مثال مضاد للعبارة المعطاة ، وذلك لأن نفى عبارة مثل " كل س هو ص " هو "يوجد س ليس ص" . كذلك نفى عبارة شرطية مثل " ق ⟵ ك" هو " ق ∧ ~ك" .

مثـــال :

إثبت عدم صحة العبارة التالية :

لكل أ ، ب ∋ ح : $\sqrt{أ}$. $\sqrt{ب}$ = $\sqrt{أب}$

البرهان :

حيث أن $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$ (بالتعريف)

$= \pm \sqrt{(-١)\ (-١)}$

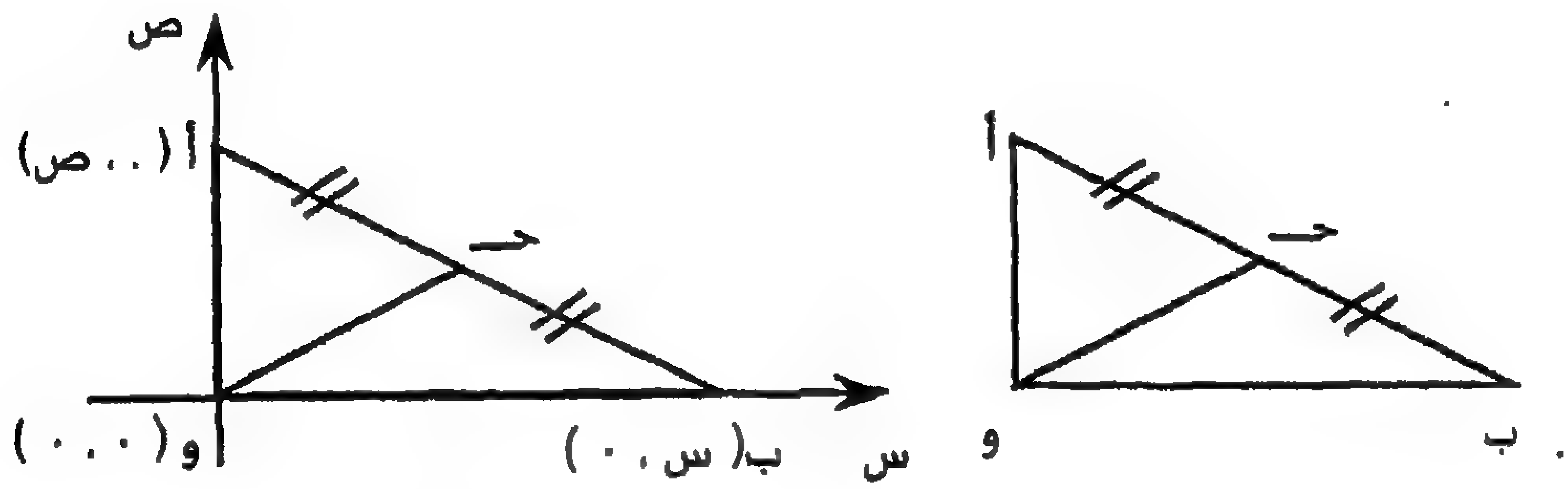
إذن : يوجد أ ، ب $\in$ ح بحيث $\sqrt{\text{أ}} \cdot \sqrt{\text{ب}} = \pm \sqrt{\text{أب}}$

إذن العبارة المذكورة فى رأس السؤال ليست صحيحة .

ثامناً : إثبات بعض النظريات الهندسية جبرياً :

نظرية (١) :

فى المثلث القائم الزاوية المستقيم الواصل من رأس القائمة إلى منتصف الوتر يساوى نصف الوتر.



المعطيات : و أ ب مثلث قائم الزاوية فى و ، حـ منتصف الوتر أ ب ؛

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{وحـ}} = \frac{١}{٢}\ \overline{\text{أ ب}}$

البرهان : نعتبر أن و نقطة الأصل ، و ب محوراً ، للسينات ، و أ محوراً للصادات .

نفرض أن أ (٠ ، ص) ، ب (س ، ٠) .

∴ حـ منتصف أ حـ

∴ إحداثيات النقطة حـ = $\left(\frac{\text{س}}{٢} ، \frac{\text{ص}}{٢} \right)$.

$$\overline{أب} = \sqrt{س^2 + ص^2} \qquad (1)$$

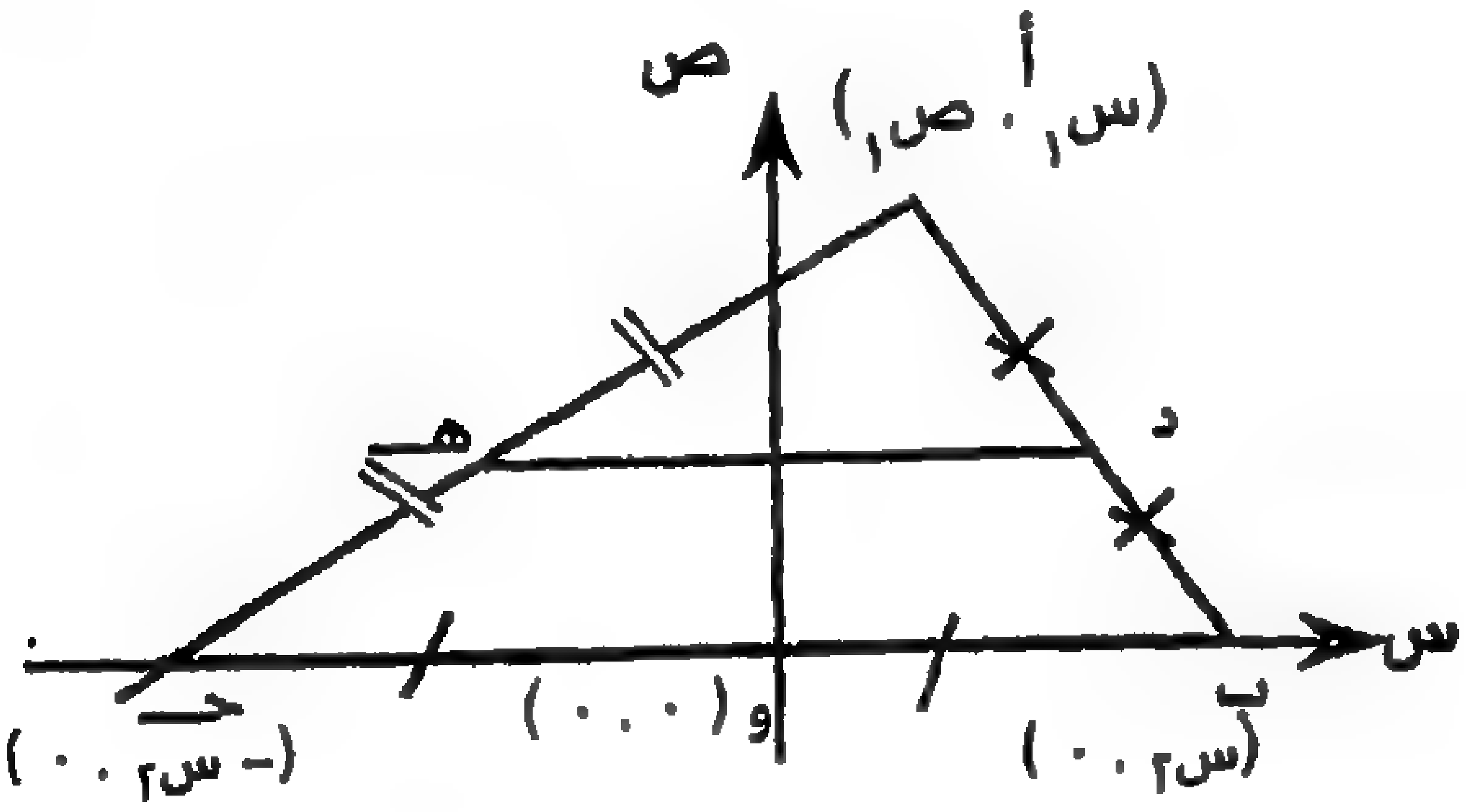
$$\overline{وحـ} = \sqrt{\frac{1}{4} س^2 + \frac{1}{4} ص^2} = \frac{1}{2} \sqrt{س^2 + ص^2} \qquad (2)$$

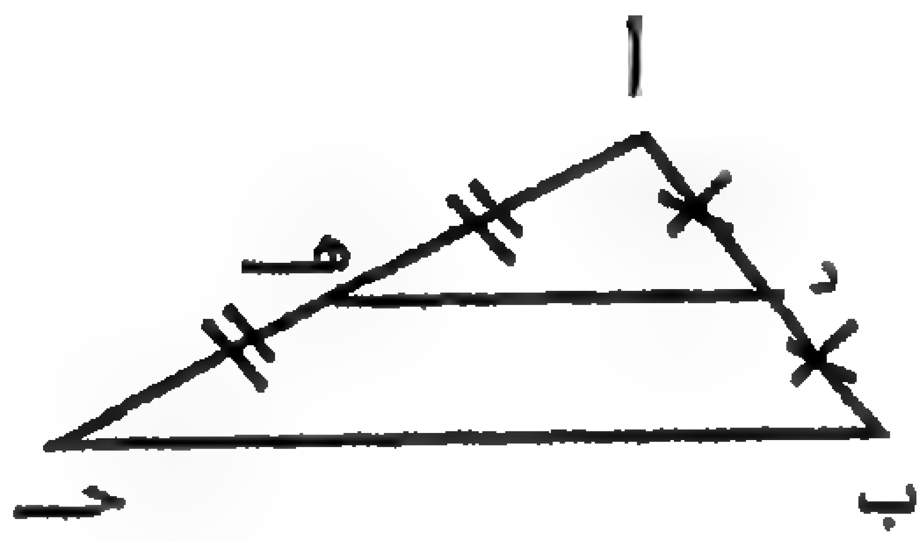
من (1) ، (2) :

وحـ = $\frac{1}{2}$ أ ب .

نظرية (2) :

المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثل يوازي الضلع الثالث ، ويساوي نصفه .





المعطيات : المثلث أ ب حـ فيه د ، هـ منتصفي أ ب ، أ حـ على الترتيب .

المطلوب : إثبات أن :

(1) $\overline{هـ د}$ // $\overline{حـ ب}$.

(2) $\overline{هـ د} = \frac{1}{2} \overline{حـ ب}$.

العمل والبرهان :

ننصف ب حـ في و ، ونعتبر نقطة و هي نقطة الأصل ، و ب محوراً للسينات ، وص (العمودى على و ب من و) محوراً للصادات .

نفرض أن أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ٠)

و حـ = و ب (عددياً) ⟵ حـ (- $س_٢$ ، ٠)

د منتصف أ ب ⟵ د ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١}{٢}$)

هـ منتصف أ حـ ⟵ هـ ($\frac{س_١ - س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١}{٢}$)

$$\text{ميل هـ د} = \frac{\frac{ص_١}{٢} - \frac{ص_١}{٢}}{\frac{س_١ + س_٢}{٢} - \frac{س_١ - س_٢}{٢}} = \text{صفر}$$

∴ هـ د // محور السينات ⟵ هـ د // حـ ب (المطلوب أولا)

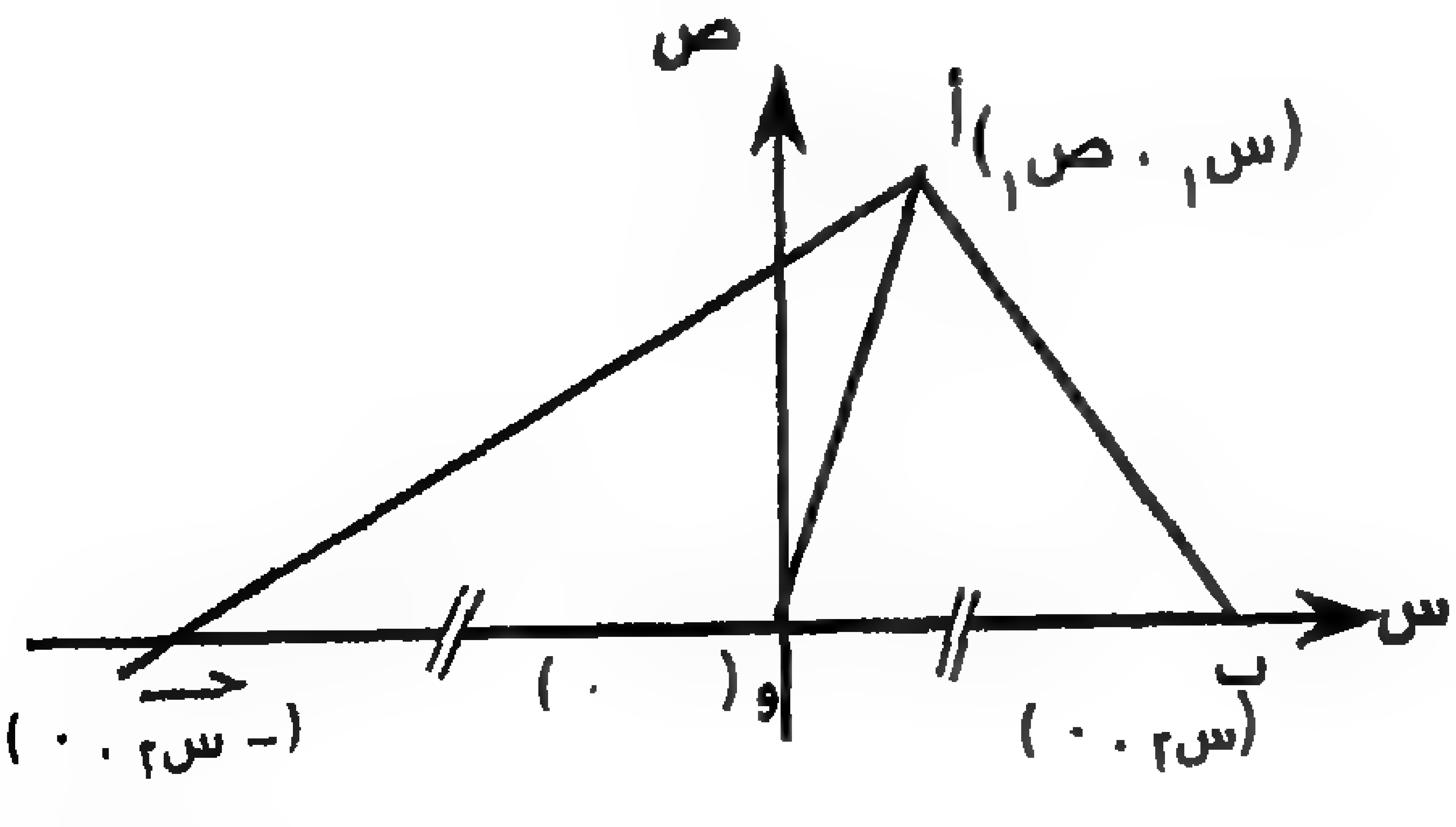
$$\overline{هـ د} = \frac{س_١ + س_٢}{٢} - \frac{س_١ - س_٢}{٢} = س_٢$$

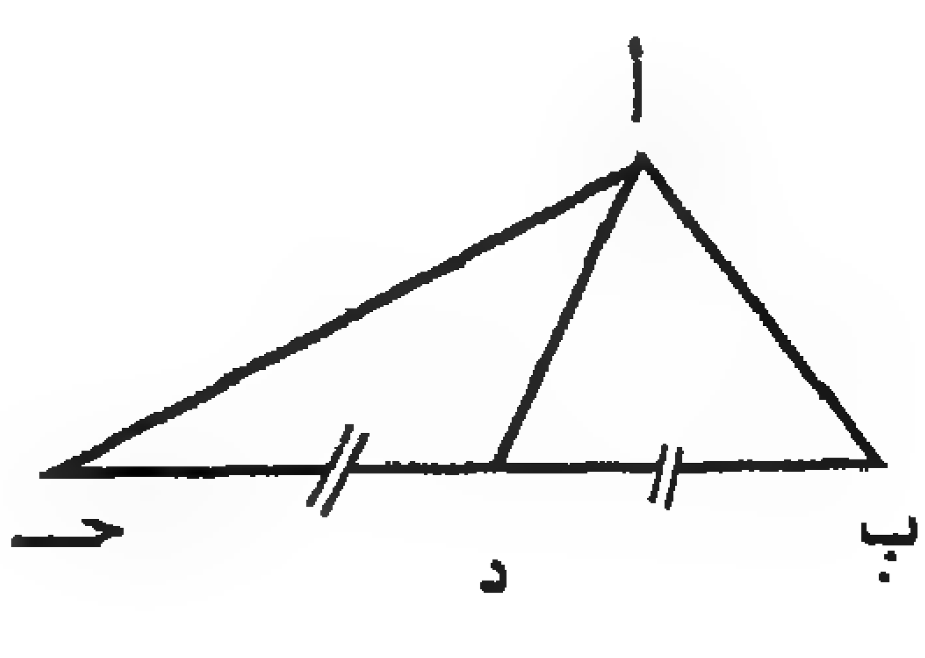
ولكن : $\overline{حـ ب} = س_٢ - (-س_٢) = ٢ س_٢$

∴ $\overline{هـ د} = \frac{١}{٢} \overline{حـ ب}$ (المطلوب ثانيا)

نظرية (٣) :

مجموع المربعين المنشأين علي ضلعين من مثلث يكافئ ضعف المربع المنشأ علي المستقيم المتوسط المنصف للضلع الثالث مضافا إليه ضعف المربع المنشأ على نصف الضلع الثالث .





المعطيات : النقطة و منتصف ب حـ فى المثلث أ ب حـ

المطلوب : إثبات أن .

$$\overline{\text{أب}}^{٢} + \overline{\text{أحـ}}^{٢} = ٢\,\overline{\text{أو}}^{٢} + ٢\,\overline{\text{وب}}^{٢}$$

البرهان : نعتبر و نقطة الأصل . وب محوراً للسينات . وص (العمودى على و ب من النقطة و) محوراً للصادات .

نفرض أن أ $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$ ، ب$(\text{س}_{٢} ، ٠)$ . .

و حـ = و ب (عددياً) $\longleftarrow$ حـ $(-\text{س}_{٢} ، ٠)$

وبتطبيق قانون البعد بين نقطتين :

$$\overline{\text{أب}}^{٢} = (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (٠ - \text{ص}_{١})^{٢} = (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢}$$

$$، \overline{\text{أحـ}}^{٢} = (-\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (٠ - \text{ص}_{١})^{٢} = (\text{س}_{٢} + \text{س}_{١})^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢}$$

وبالجمع :

$$\overline{\text{أب}}^{٢} + \overline{\text{أحـ}}^{٢} = (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{س}_{٢} + \text{س}_{١})^{٢} + ٢\text{ص}_{١}^{٢}$$

$$= ٢(\text{س}_{١}^{٢} + \text{س}_{٢}^{٢}) + ٢\text{ص}_{١}^{٢}$$

$$= ٢(\text{س}_{١}^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢}) + ٢\text{س}_{٢}^{٢}$$

$$= ٢\,\overline{\text{وأ}}^{٢} + ٢\,\overline{\text{وب}}^{٢}$$

تاسعاً : حل المعادلات الجبرية بإستخدام التفاضل :

مثال :

اثبت أن المعادلة الآتية تمثل خطين مستقيمين . وأوجد معادلة كل من المستقيمين . ونقطة تقاطعهما :

$$\text{ص}^{٢} + \text{س ص} - ٢\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} - \text{ص} - ٢ = ٠$$

الحل الأول :

يمكن إيجاد نقطة التقاطع بدون حل المعادلة المعطاة إلى معادلتين منفردتين وذلك بتكوين معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى س ، ص كما يلى :

س ص − ٢س٢ − ٥س = ثابت

، ص٢ + س ص − ص = ثابت

نفاضل المعادلة جزئياً بالنسبة إلى س ونساوي النتيجة بالصفر. ثم نفاضل المعادلة جزئياً بالنسبة إلي ص ونساوي النتيجة بالصفر. فنحصل على :

ص − ٤س −٥ = ٠

، ٢ص + س − ١ = ٠

وبحل المعادلتين السابقتين جبرياً ∴ نحصل على نقطة التقاطع ، وهى (−١ ، ١) .

الحل الثانى :

أيضاً يمكن حل المعادلة المعطاة باعتبارها من الدرجة الثانية فى ص (حيث أن معامل ص٢ موجب بينما معادل س٢ سالب) بدون إستخدام التفاصيل كما يلى :

ص٢ + ص (س − ١) − ٢س٢ − ٥س − ٢ = ٠

$$ص = \frac{-(س - ١) \pm \sqrt{(س - ١)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٢س^٢ - ٥س - ٢)}}{٢ \times ١}$$

$$٢\,ص = -س + ١ \pm \sqrt{٩\,(س+١)^٢} = ١ - س \pm ٣\,(س+١)$$

والمعادلة السابقة تمثل خطين مستقيمين ، هما :

ص = س + ٢ ، ص = −٢س − ١

بحل المعادلتين السابقتين جبرياً نحصل على نقطة التقاطع، وهى (−١ ، +١).

عاشراً : إثبات بعض قوانين الحجوم فى الهندسة الفراغية بإستخدام التكامل :

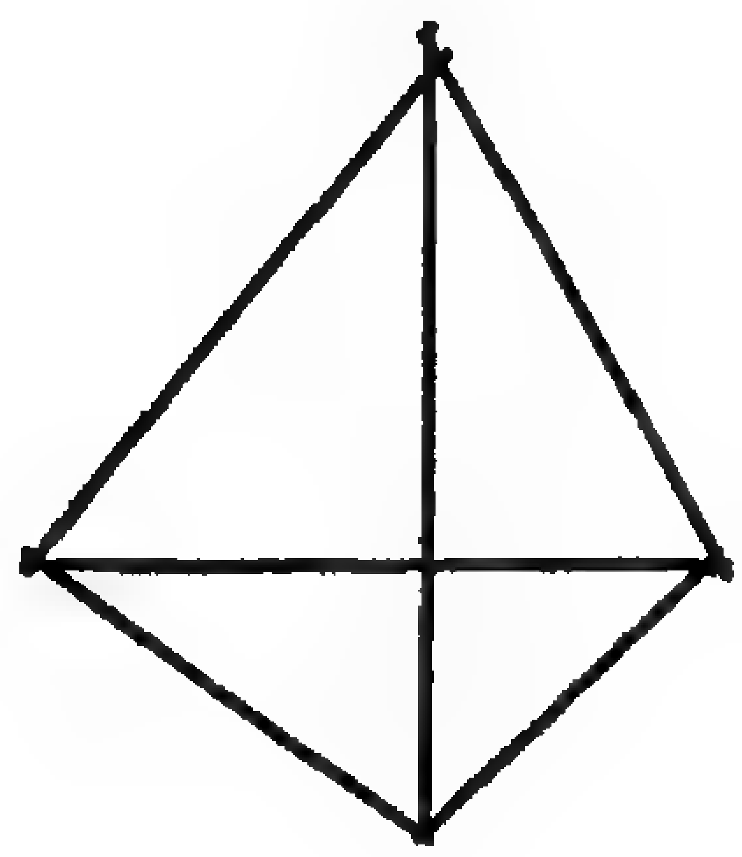
فى حالة المخروط (أو الهرم) القائم أو المائل ، المرسوم على أية قاعدة ، نأخذ نقطة الأصل (و) عند الرأس ، ونأخذ المحور السينى عمودياً على القاعدة ،فإذا كانت ق مساحة القاعدة ، وكانت ع الإرتفاع ، فإن مساحة المقطع على بعد س من (و) هى :

$$د(س) = \left(\frac{س}{ع}\right)^{٢} ق$$

وذلك لأن النسبة بين مساحتى شكلين متشابهين كالنسبة بين مربعى ضلعين متناظرين :

$$\text{الحجم} = \frac{ق}{ع^{٢}} \int_{٠}^{ع} س^{٢}\, د\, س$$

$$= \frac{١}{٣} ق \times ع$$



أى أن الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثـال :

المطلوب إثبات أن :

حجم الهرم الثلاثى = $\frac{١}{٦}$ ع أ أَ حا هـ .

حيث :

أ ، أَ طولا حرفين متقابلين .

، ع أقصر مسافة بين هذين الحرفين .

، هـ الزاوية بين اتجاهى الحرفين .

البرهان :

نقسم الهرم الثلاثى إلى صفائح بواسطة مستويات توازى الحرفين أ ، أَ ، وبالتالى تكون عمودية على اتجاه أقصر بعد بينهما .

يبين الشكل أن :

المقطع الحادث بأى مستوى من هذه المستويات بحيث يبعد مسافة س من الحرف أ يكون على شكل متوازى أضلاع . بعداه هما :

$\frac{س}{ع}$ أَ ، $\frac{ع - س}{ع}$ أ .

إذن مساحته ، هى :

$$\frac{\text{أأً}}{\text{ع}^{2}} \times \text{س} \left(\text{ع} - \text{س} \right) \text{جا هـ} .$$

$$\text{ح} = \frac{\text{أأً}}{\text{ع}^{2}} \text{جا هـ} \int_{0}^{\text{ع}} \text{س} \left(\text{ع} - \text{س} \right) \text{د س}$$

$$= \frac{\text{أأً}}{\text{ع}^{2}} \text{جا هـ} \times \left(\frac{1}{2} \text{ع}^{3} - \frac{1}{3} \text{ع}^{3} \right)$$

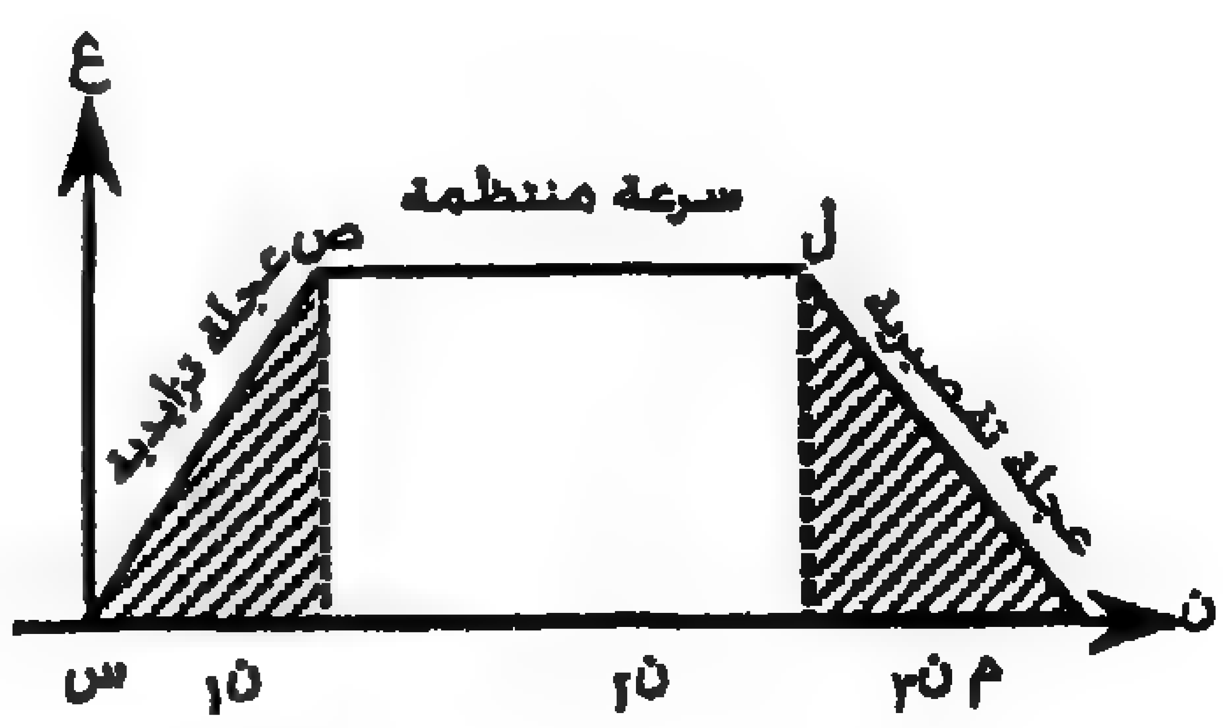
$$= \frac{\text{أأً}}{\text{ع}^{2}} \text{جا هـ} \times \frac{1}{6} \text{ع}^{3}$$

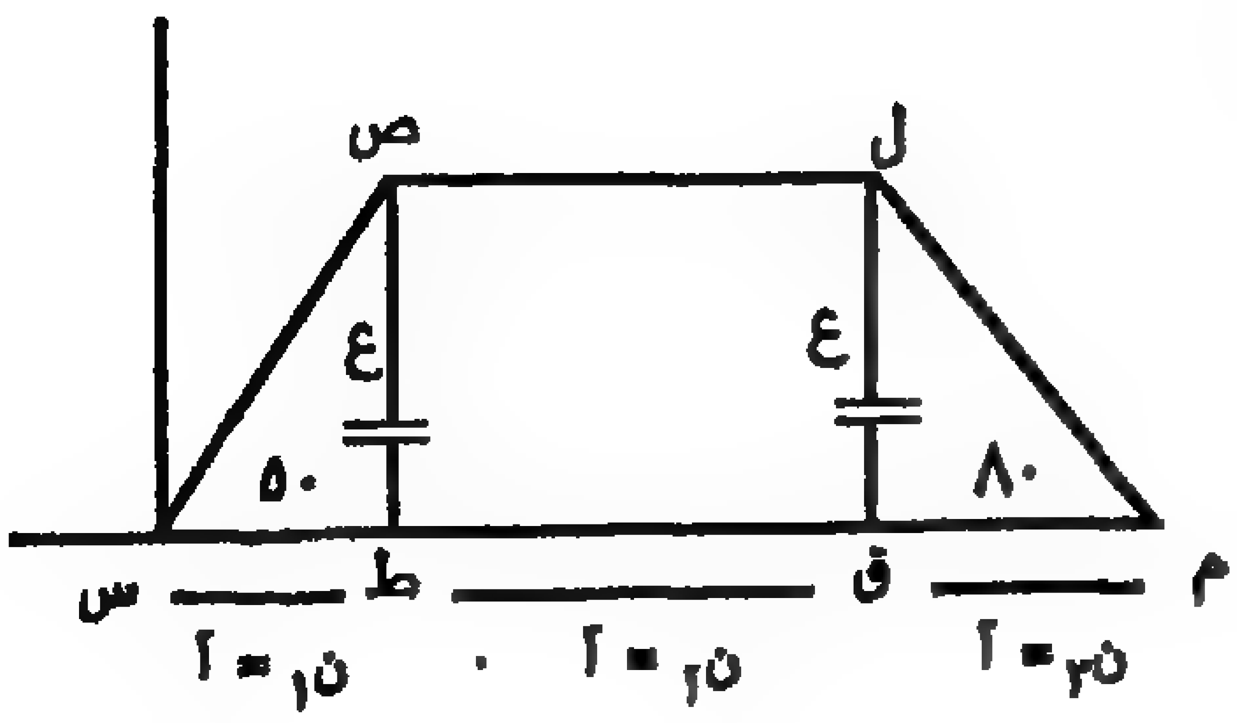
$$= \frac{1}{6} \text{ع أأً جا هـ}$$

حادى عشر : حل بعض المسائل الميكانيكية بيانياً :

مثـال :

ترام يسير بين محطتين أ ، هـ المسافة بينهما ١٢٠٠ ياردة ، ويبدأ بعجلة منتظمة مدة الخمس ثوان الأولى ، حيث يقطع المسافة أ ب ، وقدرها ٥٠ قدماً ثم يسير بسرعة منتظمة مدة من الزمن حتى يصل إلي نقطة د ، ثم يسير بعجلة تقصيرية مسافة ٨٠ قدماً الأخيرة . أوجد سرعته المنتظمة التى كان يسير بها بين ب ، د . ثم أوجد الزمن الذي يستغرقه الترام فى السير بين المحطتين .





الخط المنكسر س ص ل م يمثل الخط البياني للعلاقة بين السرعة والزمن لحركة الترام أثناء سيره بين المحطتين . ومساحة شبه المنحرف س ص ل م تمثل المسافة بين المحطتين . وتنقسم مساحة شبه المنحرف إلى المساحات التالية :

* مساحة Δ س ص ط . وهى تمثل المسافة الأولى (ف$_1$) المقطوعة بعجلة تزايدية فى فترة زمنية ن$_1$ = ٥ ثوانى .

* مساحة المستطيل ط ص ل ق . وهى تمثل المسافة الثانية (ف$_2$) المقطوعة بسرعة منتظمة (ع) فى زمن قدره ن$_2$.

* مساحة المثلث ق ل م . وهى تمثل المسافة الثالثة (ف$_3$) المقطوعة بعجلة تقصيرية فى فترة زمنية ن$_3$.

حيث أن : مساحة المثلث س ص ع = ف$_1$ = ٥٠ قدم (عددياً) :

$\frac{1}{2} \times$ ٥ ع = ٥٠ $\longleftarrow$ ع = ٢٠ قدم/ث

مساحة المستطيل ط ص ل ق = ف$_2$ = ١٢٠٠ - (٥٠ + ٨٠)

= ١٠٧٠ قدم (نعدديا)

ن$_2$ × ع = ١٠٧٠

٢٠ × ن$_2$ = ١٠٧٠ $\longleftarrow$ ن$_2$ = $\frac{1}{2}$ ٥٣ث

مساحة المثلث ق ل م = ف$_3$ = ٨٠ قدم (عدديا) .

$\frac{1}{2}$ن$_3$ × ع = ٨٠ $\longleftarrow$ ١٠ ن$_3$ = ٨٠ $\longleftarrow$ ن$_3$ = ٨ ث

الزمن الكلى = ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$

= ٥ + $\frac{1}{2}$٥٣ + ٨

= $\frac{1}{2}$ ٦٦ ث .

الفصل السابع

نماذج البراهين الرياضية

* أمثلة من الهندسة المستوية .
* أمثلة من الجبر .
* أمثلة من الهندسة التحليلية .
* أمثلة من النهايات .
* أمثلة من التفاضل .
* أمثلة من التكامل .
* أمثلة من الهندسة الفراغية .
* أمثلة من الميكانيكا .

عند برهنة أى تمرين فى الرياضيات ، فإننا نقوم بعملية تحليل للموقف بهدف محاولة تحليل المعطيات وتحليل المطلوب ، ثم محاولة الربط بينهما للوصول من المعطيات إلى المطلوب .

وتسمى عملية التحليل آنفة الذكر ، بالطريقة التحليلية فى التفكير ، ولكنها ليست طريقة للبرهان ، إذ إنه فى ضوء ذلك التحليل قد نستخدم برهاناً بطريقة مباشرة ، أو غير مباشرة .كما أننا قد نستخدم إحدى إستراتيجيات البرهان السابق ذكرها فى الفصل السابق ، ويتوقف ذلك على طبيعة المسألة من ناحية ،وعلى مستوى التلاميذ والدراسة من ناحية أخرى .

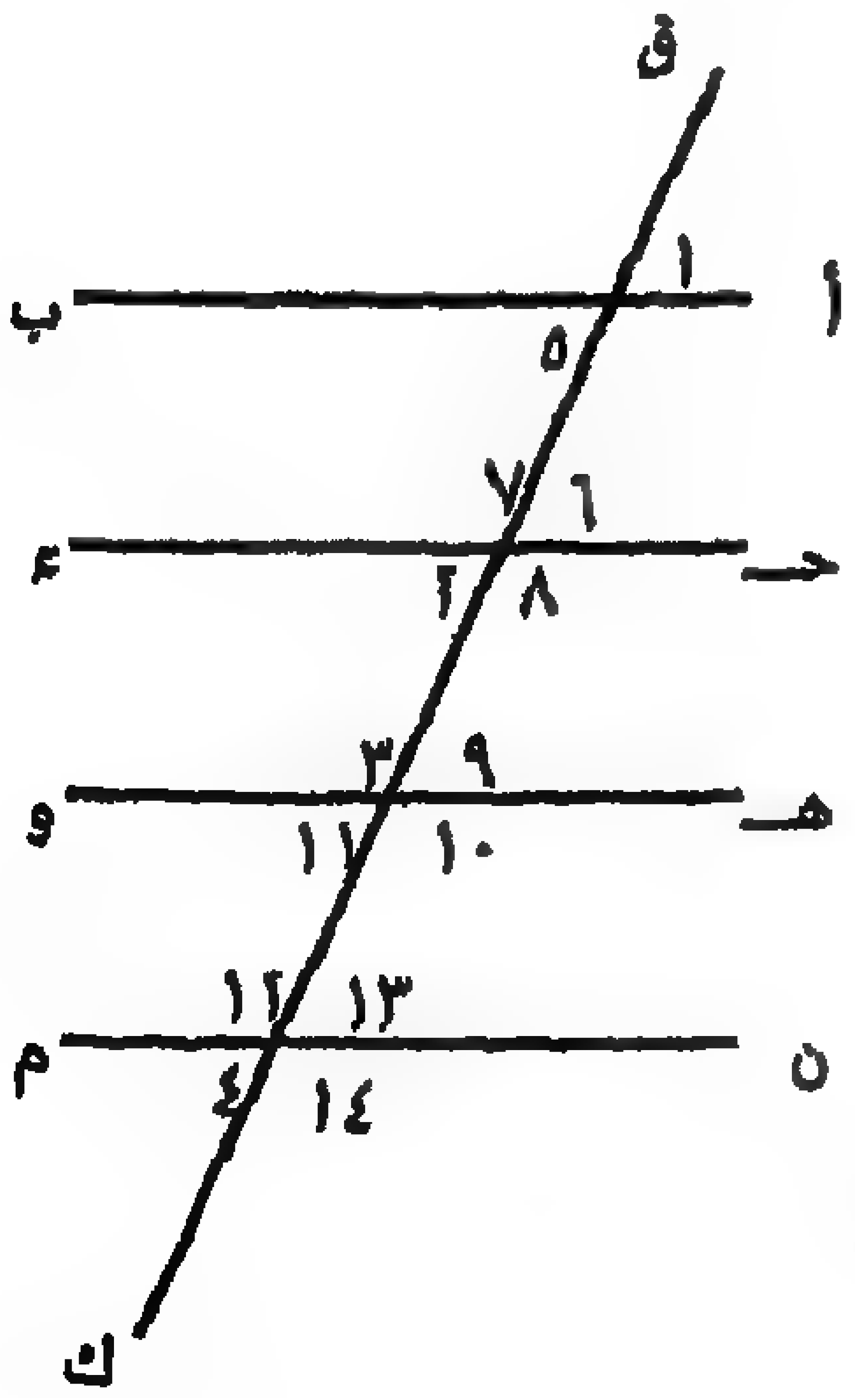
وتوضح الأمثلة التالية بعض طرق التفكير المستخدمة فى تحليل المواقف للوصول إلى الحل المنشود والبرهان المطلوب ، كما تبين طرق تسجيل الحل أو البرهان لهذه الأمثلة :

أولاً : أمثلة من الهندسة المستوية :

مثال (١) :

أ ب ، حـ د ، هـ و ، ن م مستقيمات ، ق ك قاطع لها كما بالشكل ، فإذا كان م (^١) = م(^٢) = م(^٤)، م (^٣) + م(^٤) = ١٨٠°

اثبت أن أ ب // حـ د // هـ و // ن م .



المعطيات :

أ ب ، حـ د ، هـ و ، ن م مستقيمات متوازية ، ق ك قاطع لها .

، م(^١) = م(^٢) = م(^٤)

، م(^٣) + م(^٤) = ١٨٠°

المطلوب : إثبات أن أ ب // حـ د // هـ و // ن م

يمكن التفكير فى هذا المثال كما يلى :

أ ب // حـ د // هـ و // م ق إذا تساوت مقاييس الزوايا المتناظرة $\hat{1}$ ، $\hat{6}$ ، $\hat{9}$ ، $\hat{13}$

أ ب // حـ د ، إذا كان ن م ($\hat{1}$) = م($\hat{6}$)

وبالطبع يمكن إثبات ذلك ، م ($\hat{6}$) = م($\hat{2}$) وبالتقابل بالرأس ، م($\hat{1}$) = م($\hat{2}$) معطيات .

، حـ د // ن م إذا كان ($\hat{6}$) = م ($\hat{13}$) . وبالطبع يمكن إثبات ذلك ، م($\hat{4}$) = م($\hat{13}$) بالتقابل بالرأس . م($\hat{2}$) = م($\hat{6}$) بالتقابل بالرأس ، م($\hat{2}$) = م($\hat{4}$) معطيات .

إذن م($\hat{6}$) = م($\hat{13}$) .

م ن // هـ و ، إذا كان م($\hat{7}$) = م($\hat{4}$) وبالطبع يمكن إثبات ذلك لأن كل من $\hat{4}$ ، $\hat{11}$ تكمل $\hat{3}$.

إذن أ ب // حـ د // هـ و // م ن .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

البرهان :

م($\hat{1}$) = م($\hat{2}$)	معطيات : (1)
م($\hat{2}$) = م($\hat{4}$)	معطيات : (2)
م ($\hat{1}$) = م($\hat{5}$)	تقابل بالرأس : (3)
م($\hat{2}$) = م($\hat{6}$)	تقابل بالرأس : (4)
م ($\hat{7}$) = م($\hat{8}$)	تقابل بالرأس : (5)
م ($\hat{3}$) = م($\hat{10}$)	تقابل بالرأس : (6)
م ($\hat{9}$) = م($\hat{11}$)	تقابل بالرأس : (7)

م$(\hat{4})$ = م$(\hat{13})$	تقابل بالرأس : (٨)
م $(\hat{12})$ = م$(\hat{14})$	تقابل بالرأس : (٩)
م$(\hat{1})$ = م$(\hat{6})$	من (١) ، (٤) وخاصية الانتقال للتساوي : (١٠)
إذن $\overline{أب}$ // $\overline{حـ د}$	من (١٠) ونظرية : (١١)
، $\overline{حـ د}$ // $\overline{م ن}$	من (٢) ونظرية : (١٢)
إذن $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ د}$ // $\overline{م ن}$	من (١١) ومن (١٢) وخاصة الانتقال للتوازى : (١٣)
وحيث م$(\hat{3})$ + م$(\hat{4})$ = ١٨٠°	معطيات : (١٤)
، م $(\hat{4})$ + م $(\hat{12})$ = ١٨٠°	نظرية : (١٥)
إذن م $(\hat{3})$ = م $(\hat{12})$	من (١٤) ، (١٥) وخاصية الحذف لجميع الأعداد الحقيقية (١٦)
إذن $\overline{م ن}$ // $\overline{هـ و}$	من (١٦) ونظرية : (١٧)

إذن $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ د}$ // $\overline{م ن}$ // $\overline{هـ و}$

من (١٣) ، (١٧) وخاصية الانتقال .

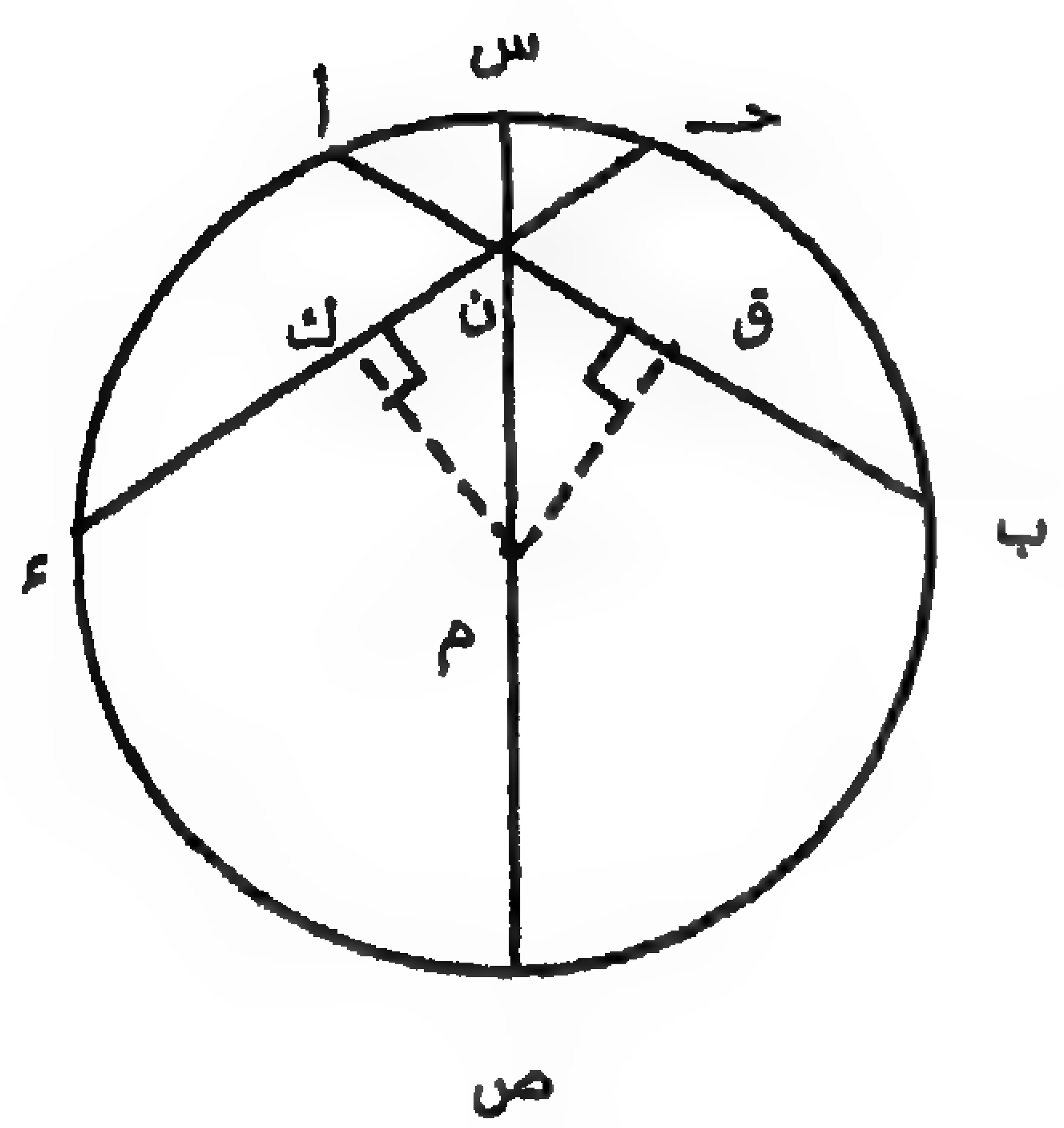
مثـال (٢) :

إذا كانت م دائرة ، س ص قطر فيها ، أ ب ، حـ د وتران متساويان يتقاطعان مع القطر س ص فى ن ؛ إثبت أن الوترين يصنعان زاويتين متساويتى المقياس مع القطر س ص .

المعطيات

م دائرة ، س ص قطر فيها ، أ ب ، حـ د وتران متساويان متقاطعان مع القطر س ص في نقطة ن .

المطلوب : إثبات أن : م (ب نˆ ص) = م(د نˆ ص)



يمكن التفكير في هذا المثال كما يلي :

حيث أن المطلوب هو إثبات م (ص نˆ ب) = م (ص نˆ د) . فلو أن م (ص نˆ ب) = م(ص نˆ د) . لوقعت الزاويتن في مثلثين متطابقين . وهنا قد يقوم الطالب بتوصيل ص ب ، ص د ويبحث عن شروط تطابق المثلثين ص ن ب ، ص ن د فيفشل بالطبع .

وبرجوعه إلى المعطيات . يجد أن الوتر أ ب = الوتر حـ د ، وحيث أن م هي مركز الدائرة ، إذن لو أسقطنا من م عمودين إلي أ ب ، حـ د على الترتيب لكانا متساويين . وهذا التفكير يؤدي إلى العمل المساعد . فيقوم الطالب بإسقاط العمودين م ق ، م ك من النقطة م على أ ب ، جـ د على الترتيب .

هنا يظهر أمام الطالب إمكانية تطابق المثلثين م ق ن ، م ك ن فيجد أن شروط التطابق محققة وممثلة في : م ق = م ك ، م (م قˆ ن) = م، (م كˆ ن) = ٩٠° ، م ن = م ن . وعليه ، يستنتج الطالب أن م(م نˆ ق) = م ، (م نˆ ك) وهذا يؤدي بالطبع إلى المطلوب .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالي :

العمل :

نسقط من م العمودين م ق ، م ك على أ ب ، حـ د على الترتيب .

البرهان :

حيث أ ب = حـ د (معطيات)

إذن أ ب ، حـ د على أبعاد متساوية من م (نظرية)

إذن م ق = م ك

المثلثان م ن ق ، م ن ك فيهما :

م ق = م ك

م(م ق̂ ن) = م(م ك̂ ن) = ٩٠°

م ن = م ن

إذن Δ م ن ق ≡ Δ م ن ك

إذن م(م ن̂ ق) = م(م ن̂ ك)

إذن م(ص ن̂ ب) = م(ص ن̂ د)

مثـال (٣) :

فى الشكل الموضح : أ ب = ب حـ = حـ أ = $\frac{١}{٢}$ حـ هـ ، أ حـ̂ د = ١٢٠°.

والمطلوب إثبات أن : أهـ² = ٧ أحـ²

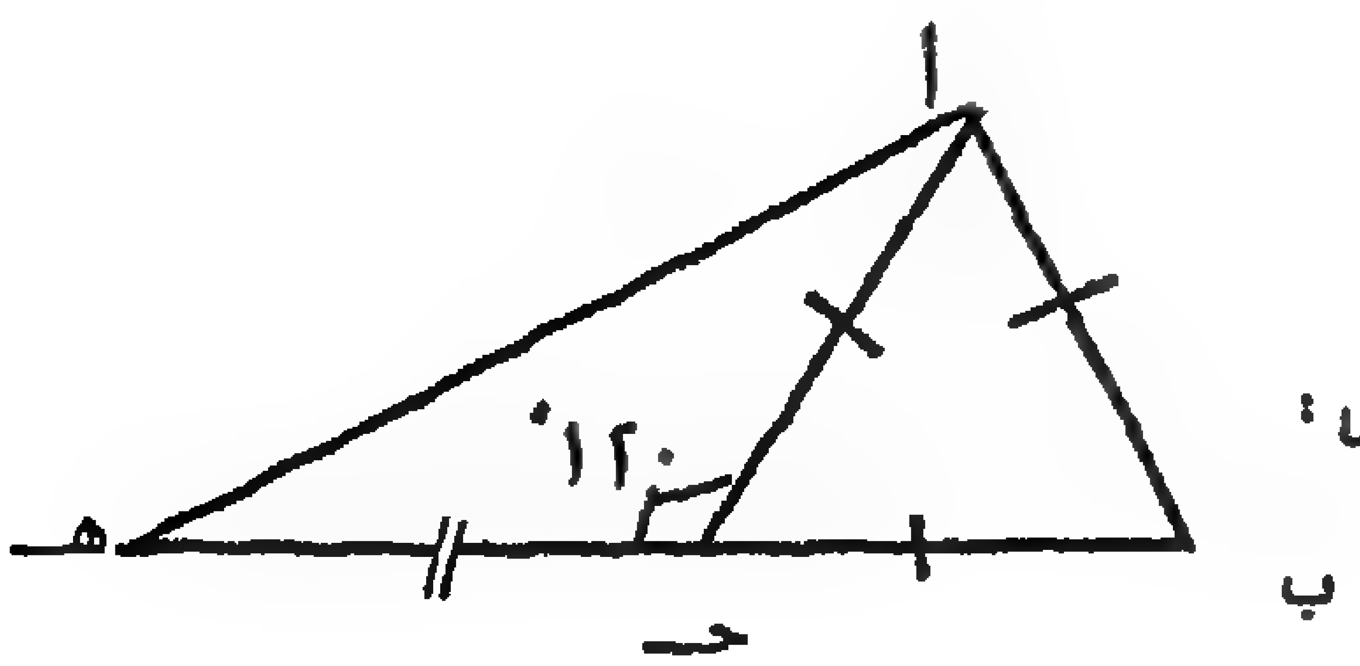
المعطيات :

١- أب = ب حـ = حـ أ = $\frac{١}{٢}$ حـ هـ . ٢- أ حـ̂ د = ١٢٠°

المطلوب :

إثبات أن أ د² = ٧ أحـ²

يمكن التفكير فى هذا المثال كما يلى :



حيث أن المطلوب إثبات أن :

$$\overline{\text{أهـ}}^{\text{٢}} = \text{٧}\,\overline{\text{أحـ}}^{\text{٢}}$$

وحيث أن أ هـ ، أ حـ يجمعهما المثلث أ حـ هـ الذى فيه أ حـ هـ منفرجة .

إذن يمكن تطبيق نظرية الزاوية المنفرجة ، وذلك يستوجب إسقاط العمود أ د على ب حـ (العمل) ليكون د حـ هو مسقط أ حـ على جـ هـ .

وحيث أن المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع ، أ د عمودى على ب حـ ، إذن د حـ $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ حـ .

إذن يمكن بسهولة تطبيق نظرية الزاوية المنفرجة . لأن كل الجاهيل أصبحت الآن معلومة .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

العمل :

نسقط من (أ) العمود أ د ليلاقى ب حـ فى د .

البرهان :

المثلث أ ب حـ متساوي الأضلاع، أ د عمودى على ب حـ

إذن : د حـ $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ حـ

المثلث أ حـ هـ فيه أ $\hat{\text{حـ}}$ هـ منفرجة :

إذن : $\overline{\text{أهـ}}^{\text{٢}} = \overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}} + \overline{\text{حـهـ}}^{\text{٢}} + \text{٢}\,\overline{\text{حـهـ}} \times \overline{\text{حـد}}$

$$= \overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}} + \text{٤}\,\overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}} + \text{٢} \times \text{٢}\,\overline{\text{أحـ}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\overline{\text{حـأ}}$$

$$= \overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}} + \text{٤}\,\overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}} + \text{٢}\,\overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}} = \text{٧}\,\overline{\text{حـأ}}^{\text{٢}}$$

ثانياً : أمثلة من الجبر :

مثال (١) :

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ فإثبت أن $\frac{\text{أ حـ} - ٣\,\text{ب}^{٢}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}^{٢} - ٣\,\text{ب د}}{\text{د}}$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال بإحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى :

يمكن إثبات أن $\frac{\text{أ حـ} - ٣\,\text{ب}^{٢}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}^{٢} - ٣\,\text{ب د}}{\text{د}}$ إذا أمكن إثبات أن :

$$(\text{أ حـ} - ٣\,\text{ب}^{٢})\,\text{د} = (\text{حـ}^{٢} - ٣\,\text{ب د})\,\text{ب}$$

لاحظ أن ذلك يتحقق بضرب الطرفين $\times \frac{\text{د}}{\text{ب}}$

وهذا يكون صحيحاً إذا أمكن إثبات أن :

$\text{أ حـ د} - ٣\,\text{ب}^{٢}\text{د} = \text{حـ}^{٢}\,\text{ب} - ٣\,\text{ب}^{٢}\,\text{د}$ (خاصية فك الأقواس)

وهكذا يكون صحيحاً إذا أمكن إثبات أن :

$$\text{أ حـ د} = \text{حـ}^{٢}\,\text{ب}$$

لاحظ أن ذلك يتحقق بإضافة المعكوس الجمعى للمقدار $-٣\,\text{ب}^{٢}\text{د}$ للطرفين .

وهذا يكون صحيحاً إذا أمكن إثبات أن :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ لاحظ أن ذلك يتحقق بضرب الطرفين $\times \frac{١}{\text{ب حـ د}}$ وبذلك يكون المطلوب صحيحاً .

الطريقة الثانية :

يمكن إثبات أن $\frac{أ حـ - ٣ ب^٢}{ب} = \frac{حـ^٢ - ٣ ب د}{د}$ إذا كان :

$$\frac{أ حـ}{ب} - \frac{٣ب^٢}{ب} = \frac{حـ^٢}{د} - \frac{٣ب د}{د}$$

أى إذا كان $\frac{أ حـ}{ب} - ٣ب = \frac{حـ^٢}{د} - ٣ب$

أى إذا كان $\frac{أ حـ}{ب} = \frac{حـ^٢}{د}$

أى إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$

وبذلك يكون المطلوب صحيحاً

ويمكن تسجيل الحل علي النحو التالى :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$$

$$\frac{أ}{ب} - \frac{٣ب}{حـ} = \frac{حـ}{د} - \frac{٣ب}{حـ}$$

$$\frac{أ حـ - ٣ ب^٢}{ب حـ} = \frac{حـ^٢ - ٣ ب د}{حـ د}$$

مثال (٣) :

إثبت أن جذرى المعادلة $س^٢ = ٥ س + ٦$ هما -١ ، ٦

يمكن التفكير فى الحل على النحو التالى :

بفرض أن -١ ، ٦ هما جذرى المعادلة $س^٢ = ٥ س + ٦$

∴ (س+١) = ٠ ، (س-٦) = ٠ هما عاملى المعادلة $س^٢ = ٥ س + ٦$

نستخدم الخاصية : إذا كان أ = صفر أو ب = صفر فإن أ × ب = صفر فنحصل :

(س+١) (س-٦) = ٠

$س^2 - ٥س - ٦ = ٠$

$س^2 - ٥ س - ٦ + (٥ س + ٦) = ٠ + (٥ س + ٦)$ (المعكوس الجمعى)

$س^2 = ٥ س + ٦$

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

نجعل المعادلة على الصورة الصفرية ؛ أى على الصورة العامة :

$أ س^2 + ب س + حـ = ٠$

$س^2 - (٥س + ٦) = (٥س + ٦) - (٥س + ٦)$ (بإستخدام المعكوس الجمعى) .

$س^2 - ٥س - ٦ = ٠$

$(س + ١)(س - ٦) = ٠$

$س + ١ = ٠ \longrightarrow س = -١$

، $س - ٦ = ٠ \longrightarrow س = ٦$

أيضا ، يمكن حل المعادلة $س^2 - ٥س - ٦ = ٠$، باستخدام القانون ، فيتم الحصول على نفس النتيجة السابقة .

مثال (٤) :

إذا كانت $س^2 - ٩ س + ٦ = $ صفر ، فإحسب القيمة العددية للمقدار :

$$س^2 + \frac{٣٦}{س^2}$$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

بفرض أن القيمة العددية للمقدار المطلوب = م (مثلاً) .

إذن : $س^2 + \frac{٣٦}{س^2} = م$

بالضرب فى $س^2$ نحصل على :

$س^4 + ٣٦ = م س^2$

ما تقدم يقود إلى التفكير فى حل المسألة عن طريق وضع المسألة فى الصورة : $س^2 + ٦ = ٩ س$

ثم تربيع طرفى المعادلة السابقة للحصول على معادلة من الدرجة الرابعة فى س . إذا قسمت حدودها على س^2 يمكن الحصول على المطلوب مباشرة .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

$$\text{س}^2 - 9\,\text{س} + 6 = \text{صفر} \longrightarrow \text{س}^2 + 6 = 9\,\text{س}$$

بتربيع طرفى المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\text{س}^4 + 12\,\text{س}^2 + 36 = 81\,\text{س}^2$$

$$\text{س}^4 + 36 = 69\,\text{س}^2$$

بالقسمة على س^2 نحصل على :

$$\text{س}^2 + \frac{36}{\text{س}^2} = 69 .$$

مثال (٥) :

إذا كونت الكميات ل ، م ، ن ، هـ متوالية عددية ، فإثبت أن :

$$\text{ل}^2 - \text{هـ}^2 = 3(\text{م}^2 - \text{ن}^2) :$$

يمكن التفكير فى هذا المثال على النحو التالى :

حيث أن ل ، م ، ن ، هـ فى توال عددى فيمكن وضعها فى صورة متوالية عددية ، ثم التعويض عن قيم ل ، م ، ن ، هـ فنحصل على المطلوب .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

بفرض أن :

$$\text{ل} = \text{أ} \text{ ، } \text{م} = \text{أ} + \text{د} \text{ ، } \text{ن} = \text{أ} + 2\,\text{د} \text{ ، } \text{هـ} = \text{أ} + 3\,\text{د} .$$

$$\frac{\text{ل}^2 - \text{هـ}^2}{\text{م}^2 - \text{ن}^2} = \frac{(\text{ل} - \text{هـ})(\text{ل} + \text{هـ})}{(\text{م} - \text{ن})(\text{م} + \text{ن})}$$

$$= \frac{-3\,\text{د}(2\,\text{أ} + 3\,\text{د})}{-\text{د}(2\,\text{أ} + 3\,\text{د})} = 3$$

مثال (٦) :

إذا كانت الحدود التى ترتيبها (ن +١) ، (ن + ١)^{٢} ، (ن^{٢} +١) من متوالية عددية تساوي على الترتيب ٧ ، ٩١ ، ٦٧ . أوجد قيمة (ن) ، وبين أن مجموع الستة حدود الأولى منها = صفر.

تقوم فكرة الحل فى هذا المثال على أساس وجود ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل ، هى : أ ، ن ، د . وعليه : فإن حل هذه المعادلات معاً يحدد القيم العددية للمجاهيل الثلاثة .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$ح_{(ن + ١)} = أ + ن د = ٧$ .... (١)

$ح_{(ن + ١)^{٢}} = أ + (ن^{٢} + ٢ن) د = ٩١$ .... (٢)

$ح_{ن^{٢} + ١} = أ + ن^{٢} د = ٦٧$ .... (٣)

بحل المعادلات الثلاثة السابقة معاً نحصل على :

أ = −٥ ، ن = ٦ ، د = ٢

، $ح_{٦} = \frac{٦}{٢} [٢(−٥) + (٥) \times ٢] =$ صفر. وهو المطلوب .

مثال (٧) :

إذا كونت أ ، ب ، حـ ، د متوالية هندسية حدودها موجبة .

إثبت أن : أ + د > ب + حـ .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال كما يلي :

نحاول إثبات أن : (أ + د) − (ب + حـ) > صفر.

وذلك بالتعويض عن قيم أ ، ب ، حـ ، د التى فى توال هندسى .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

نضع أ ، ب ، حـ ، د فى الصورة : أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} .

أ + د = أ + أ ر^{٣} = أ (١ + ر^{٣}) = أ (١+ر) (١-ر+ر^{٢})

ب + حـ = أ ر + أ ر^{٢} = أ ر (١ + ر) .

(أ + د) - (ب +حـ) = أ (١ - ر)^{٢} (١ + ر)

= مقدار موجب دائماً

(أ + د) - (ب + حـ) > الصفر

(أ + د) > (ب + حـ) .

حـل آخـر :

تقوم فكرة هذا الحل على أساس أن الوسط العددى لأى كميتين أكبر من وسطهما الهندسى .

ويمكن تسجيل هذا الحل على النحو التالى :

∵ أ ، ب ، حـ فى توال هندسى .

∴ أ + حـ > ٢ ب .... (١)

∵ ب ، حـ ، د فى توال هندسى .

ب + د > ٢ حـ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على :

أ + ب + حـ + د > ٢ ب + ٢ حـ

∴ أ + د > ب + حـ .

مـثال (٨) :

متواليتان هندسيتان حاصل ضرب أساسيهما يساوى الواحد الصحيح ، والحد الأول من المتوالية الثانية يساوى أربعة أمثال الحد الأول من المتوالية الأولى، ومجموع الثمانية حدود الأولى من المتوالية الأولى = ٢٤٠ . ومجموع

الثمانية حدود الأولى من المتوالية الثانية = ٦٣٫٢٥ . إوجد كلاً من المتواليتين .
وبين أن مجموع أى عدد من حدود المتوالية الثانية لا يمكن أن يزيد عن ٦٤ .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال كما يلى :

نحاول تكوين معادلتين يمكن بحلهما معاً الحصول على الحد الأول (أ) والأساس(ر) للمتوالية الأولى ، مع مراعاة أن أساس المتوالية الثانية هو المعكوس الضربى لأساس المتوالية الأولى ، وأن الحد الأول فى المتوالية الثانية أربعة أمثال الحد الأول فى المتوالية الأولى .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

بفرض أن :

أساس المتوالية الأولى = ر ، أساس المتوالية الثانية = $\frac{1}{ر}$

، الحد الأول فى المتوالية الأولى أ ، الحد الأول فى المتوالية الثانية = ٤ أ

$$\therefore \quad \frac{أ\,(ر^{8} - 1)}{ر - 1} = 2040 \quad \text{..........} \quad (1)$$

$$\frac{4أ\left[1 - \left(\frac{1}{ر}\right)^{8}\right]}{1 - \left(\frac{1}{ر}\right)} = 63{,}75 \quad \text{..........} \quad (2)$$

بقسمة المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على : ر = ٢

من (١) : أ = ٨

المتوالية الأولى : ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...

، المتوالية الثانية : ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ...

مجموع (ن) حدا من المتوالية الثانية :

$$= \frac{32\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{ن}\right]}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} < 64$$

لأن $(\frac{1}{ن})^{ن} < 1$ دائماً لجميع قيم (ن) الصحيحة الموجبة .

مثـال (٩) :

إذا كونت س ، ص ، ع ، ٢٤ متواليـة هندسـية موجـبة . وإذا كـانت ع وسطاً عددياً بين ص ، ٦ س . إوجد كلا من س ، ص ، ع . ثم إوجد مجموع المتوالية :

$$\frac{1}{س} ، \frac{1}{ص} ، \frac{1}{ع} ، \dots \infty$$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

* وضع الأعداد س ، ص ، ع ، ٢٤ فى صورة متوالية هندسية .

* تحديد العلاقة التى تربط بين ع ، ص ، ٦س على أساس أن ع وسطاً عددياً بين ص ، ٦ س .

فى ضوء ما تقدم ، يمكن إيجاد الحد الأول (أ) ، وأساس المتوالية (ر) ، وبذا نستطيع تكوين المتوالية الهندسية ، وإيجاد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

نضع الأعداد الأربعة فى الصورة :

$س ، س ر ، س ر^{2} ، س ر^{3}$

$\therefore س ر^{3} = 24 \qquad (1)$

ولكن $ع = \frac{ص + 6 س}{2}$

$\therefore س ر^{2} = \frac{ص ر + 6 س}{2} \longrightarrow ر = 2$

من (1) : س = ٣

∴ الأعداد الأربعة المطلوبة هي : ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ .

المتوالية المطلوب إيجاد مجموعها إلى مالا نهاية هى :

$$\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٦} ، \frac{١}{١٢} ، \ldots\ldots \infty$$

$$، حـ_{\infty} = \frac{١}{١ - ر} = \frac{٢}{٣}$$

ثالثاً : أمثلة من الهندسة التحليلية :

مثــال (١) :

إثبت أن النقط أ(٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٤) هي رءوس مثلث قائم الزاوية فى أ .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

كى يكون المثلث قائم الزاوية فى أ ، ينبغى أن يكون : $\overline{ب حـ}^٢ = \overline{أ ب}^٢ + \overline{أ حـ}^٢$

وعليه ، بإستخدام قانون البعد بين نقطتين نحدد أطول المستقيمات $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ على التوالى ، ثم نحاول إثبات العلاقة السابقة .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

ب حـ = ٥ ⟵ $\overline{ب حـ}^٢$ = ٢٥

أ ب = ٣ ⟵ $\overline{أ ب}^٢$ = ٩

أ حـ = ٤ ⟵ $\overline{أ حـ}^٢$ = ١٦

∴ $\overline{ب حـ}^٢ = \overline{أ ب}^٢ + \overline{أ حـ}^٢$

∴ المثلث ب أ حـ قائم الزاوية فى أ .

مــثال (٢) :

إثبت أن النقط أ(١ ، ١) ، ب (٠ ، ٠) ، حـ (-١ ، -١) تكون على إستقامة واحدة .

كى تكون النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة ، يجب أن تتحقق العلاقة :

$\overline{أ ب} + \overline{ب حـ} = \overline{أ حـ}$

ويسجل الحل كما يلى :

$\overline{أ ب}^2 = 2$ ، $أ ب = \sqrt{2}$

$\overline{ب حـ}^2 = 2$ ، $ب حـ = \sqrt{2}$

$\overline{أ حـ}^2 = 8$ ، $أ حـ = 2\sqrt{2}$

∴ $\overline{أ ب} + \overline{ب حـ} = \overline{أ حـ}$

∴ النقط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة .

مثال (٣) :

إثبت أن المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٦) ، (-٣ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية جيبها = $\frac{٣}{٥}$.

كى يكون المستقيمان متوازيان ، يجب أن يكون ميل المستقيم الأول مساويا لميل المستقبل الثانى .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

ميل المستقيم الأول = $\frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = \frac{٦ - ٣}{١ + ٣} = \frac{٣}{٤}$

ميل المستقيم الثانى = ظاهـ = $\frac{٣}{٤}$

∴ المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١ ، ٦) ، (-٣ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية جيبها = $\frac{٣}{٥}$.

مثال (٤) :

أ ب حـ مثلث معادلات أضلاعه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب هى :

٢س - ٥ ص + ١٣ = ٠ ، ٥ س + ٢ ص - ١١ = ٠ ، ١٢س - ص - ٦٧ = ٠ ،

إوجد معادلة الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ .

حل أول :

يمكن التفكير في هذا الحل على أساس إثبات أن إحدى زوايا المثلث أ ب حـ قائمة ، فيكون الضلع المقابل لها قطراً فى الدائرة المطلوب إيجاد معادلتها . إذا تحقق ذلك ، يمكن إيجاد المعادلة بدلالة نهايتى قطر فيها.

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

معادلة $\overline{\text{أ ب}}$: ٢ س − ٥ ص + ١٣ = ٠ (١)

معادلة $\overline{\text{ب حـ}}$: ٥ س + ٢ ص − ١١ = ٠ (٢)

معادلة $\overline{\text{حـ أ}}$: ١٢ س − ص − ٦٧ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) : ب = (١ ، ٣) .

من (٢) ، (٣) : حـ = (٥ ، −٧) .

من (١) ، (٣) : أ = (٦ ، ٥) .

∴ يكون المطلوب هو إيجاد معادلة الدائرة التى تمر برءوس المثلث أ ب حـ الذى إحداثيات رؤوسه هى : أ ≡ (٦ ، ٥) ، ب ≡ (١ ، ٣) ، حـ ≡ (٥ ، −٧) .

من (١) : ميل أ ب = $\frac{٢}{٥}$

من (٢) : ميل ب حـ = − $\frac{٥}{٢}$

∴ ميل أ ب × ميل ب حـ = −١

ويكون أ حـ قطراً فى الدائرة المطلوب إيجاد معادلتها .

معادلة الدائرة المطلوبة هى :

(س − ٥) (س − ٦) + (ص + ٧) (ص − ٥) = صفر

س^{٢} + ص^{٢} − ١١ س + ٢ ص − ٥ = صفر

حل ثان :

يمكن التفكير فى هذا الحل على النحو التالى :

يمكن إيجاد قيم ل ، ك ، ن ، وذلك بالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ التى هى رؤوس المثلث أ ب حـ والتى تقع على محيط الدائرة فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

من الحل الأول ، أثبتنا أن :

أ (٦ ، ٥) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٥ ، -٧)

حيث أن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ن = ٠

عند أ (٦ ، ٥) : ٦١ + ١٢ ل + ١٠ ك + ن = ٠ (١)

عند ب (١ ، ٣) : ١٠ + ٢ ل + ٦ ك + ن = ٠ (٢)

عند حـ (٥ ، -٧) : ٧٤ + ١٠ ل - ١٤ ك + ن = ٠ (٣)

بطرح (٢) من (١) نحصل على :

٥١ + ١٠ ل + ٤ ك = ٠ (٤)

بطرح (١) من (٣) نحصل على :

١٣ - ٢ل - ٢٤ ك = ٠ (٥)

من (٤) ، (٥) :

ل = - ١ $\frac{١١}{٢}$ ، ك = ١

من (١) : ن = -٥

معادلة الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ (- $\frac{١١}{٢}$) س + ٢(١) ص + (-٥) = ٠

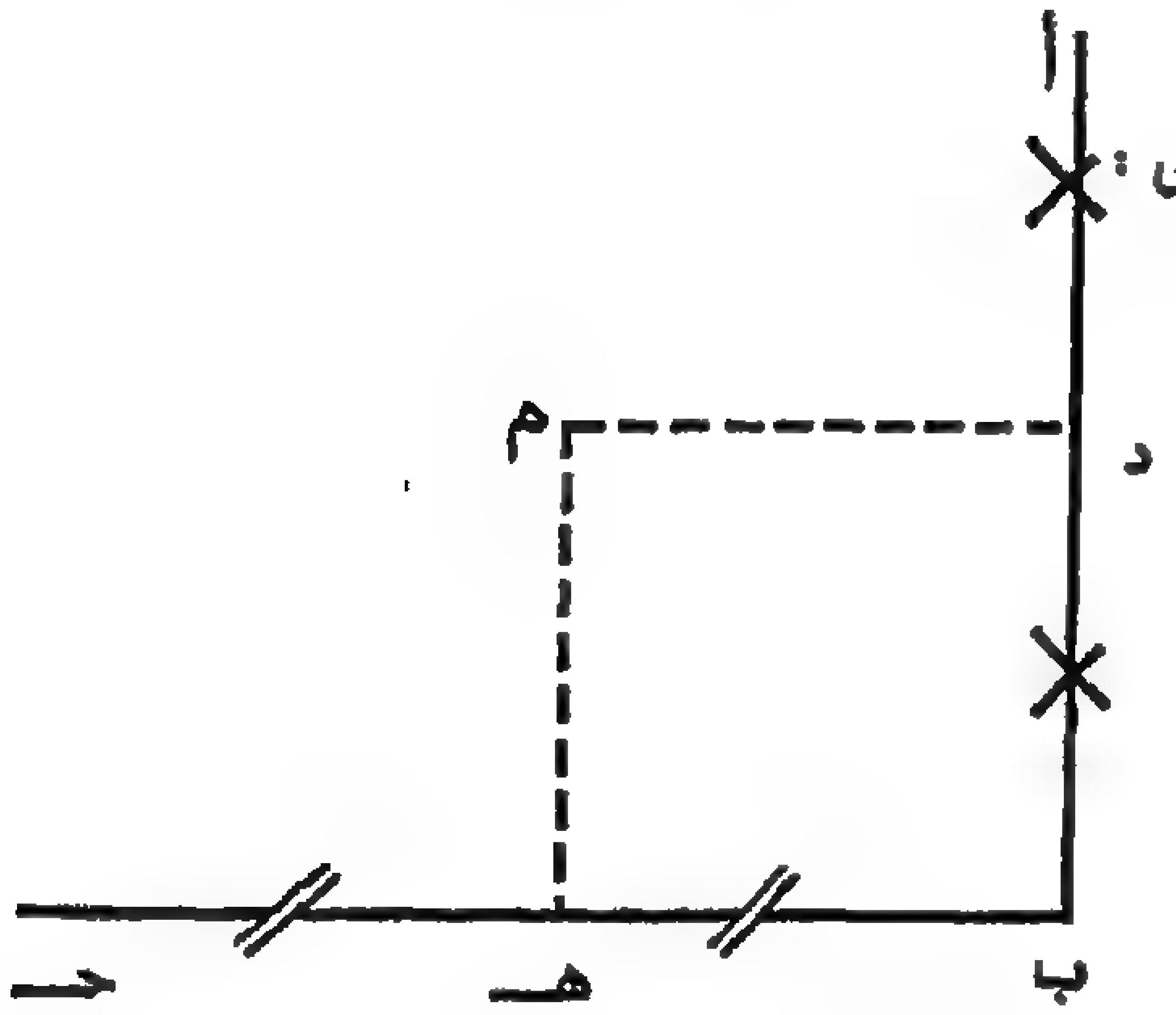
س^{٢} + ص^{٢} - ١١ س + ٢ص - ٥ = ٠

حل ثالث :

نحاول فى هذا الحل إيجاد مركز الدائرة ، ثم إيجاد نصف قطرها . وبذا يمكن إيجاد معادلة الدائرة بدلالة مركزها ونصف قطرها .

ويمكن التفكير فى إيجاد مركز الدائرة م (مثلا) على أساس أنه يمكن إيجاد معادلتى م د ، م هـ العموديان على أ ب ، ب حـ على الترتيب .

ويتحقق ذلك بإيجاد نقطتى د ، حـ ، (منتصفا أ ب ، ب حـ على الترتيب) ، ثم إيجاد ميل أ ب ، ب حـ . وبحل معادلتى م د ، م هـ جبرياً نحصل على إحداثيا مركز الدائرة (م) .



ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

∵ النقطة د منتصف أ ب

∴ د = ($\frac{٧}{٢}$ ، ٤) .

∵ النقطة هـ منتصف ب حـ

∴ هـ = (٣ ، -٢)

بفرض أن النقطة (م) هى مركز الدائرة :

ميل أ ب = $\frac{٢}{٥}$ ⟵ ميل د م = - $\frac{٥}{٢}$

معادلة د م : ٥ س + ٢ ص - $\frac{٥١}{٢}$ = ٠ (١)

ميل ب حـ = - $\frac{٥}{٢}$ ⟵ ميل م هـ = $\frac{٢}{٥}$

معادلة م هـ : ٢ س - ٥ ص - ١٦ = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) : س = $\frac{١١}{٢}$ ، ص = -١

مركز الدائرة م = ($\frac{١١}{٢}$ ، -١)

$نق^2 = \overline{مأ}^2 = \frac{١٤٥}{٤}$

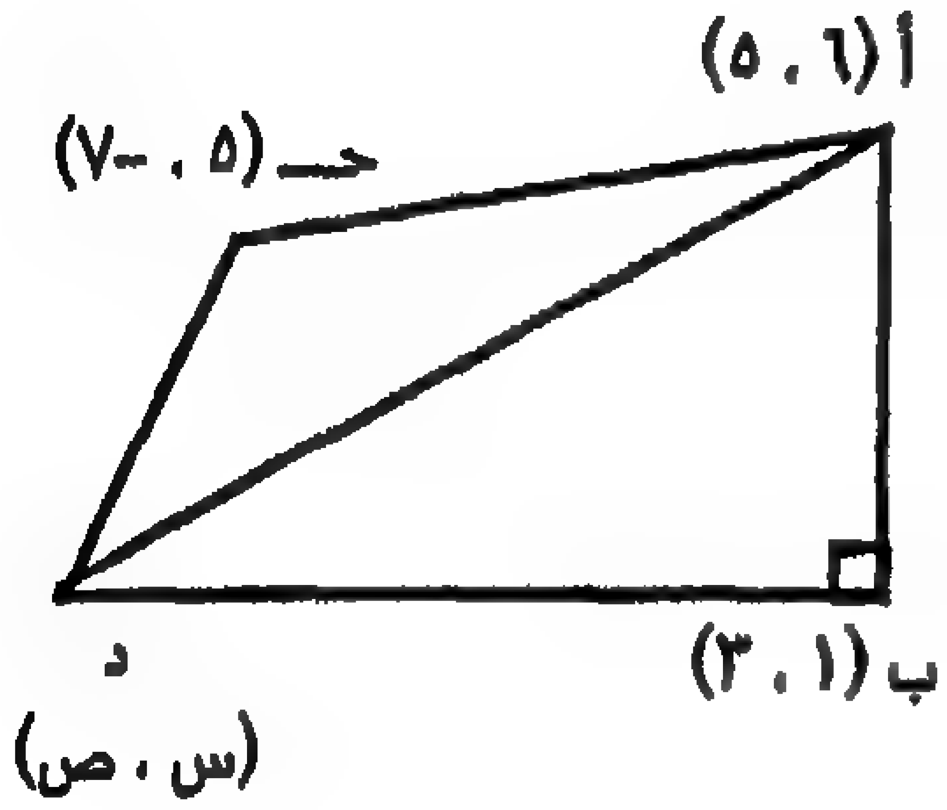
معادلة الدائرة $(س - \frac{١١}{٢})^2 + (ص + ١)^2 = \frac{١٤٥}{٤}$

$س^2 + ص^2 - ١١ س + ٢ ص - ٥ = ٠$

حل رابع :

نحاول فى هذا الحل إيجاد النقطة (د) التي تقع على محيط الدائرة ، بحيث يكون أ د قطراً فى الدائرة . وهنا ، سنجد أن النقطة (د) هى بعينها النقطة (حـ) ، أى أن النقطة (د) ستنطبق على النقطة (حـ) وعليه ، يكون $\overline{أحـ}$ قطراً فى الدائرة ، كما سبق إثباته فى الحل الأول :

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :



نأخذ أى نقطة ، ولتكن د (س ، ص) بحيث تكون طرفاً للقطر أ د .

ميل أ ب = $\frac{٣}{٥}$ ⟵ ميل ب د = $-\frac{٥}{٣}$

معادلة ب د : ٥ س + ٣ ص - ١١ = ٠ (١)

ميل أ حـ = ١٢ ⟵ ميل حـ د = $-\frac{١}{١٢}$.

معادلة حـ د : س + ١٢ ص + ٧٩ = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) : س = ٥ ، ص = - ٧ ⟵ د (٥ ، -٧) .

نلاحظ أن إحداثيات النقطة د هى نفس إحداثيات النقطة حـ ، أي أن النقطة د تنطبق على النقطة حـ ، وعليه ، يكون أ حـ قطراً فى الدائرة .

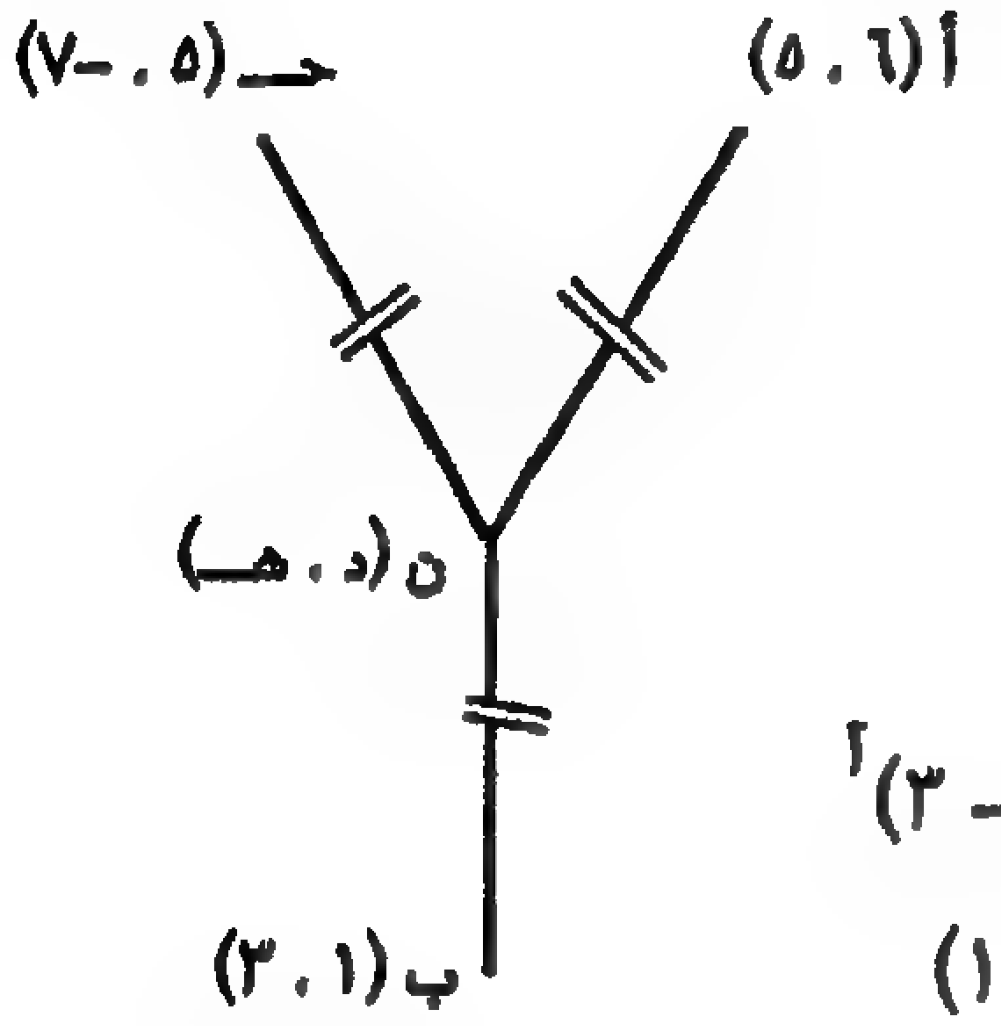
معادلة الدائرة :

(س - ٦) (س - ٥) + (ص - ٥) (ص + ٧) = ٠

$س^2 + ص^2 - ١١ س + ٢ ص - ٥ = ٠$

حل خامس :

يمكن التفكير فى هذا الحل على أساس أن مركز الدائرة (ن) يكون على أبعاد متساوية من النقط أ ، ب ، حـ (رؤوس المثلث أ ب حـ) التى تقع على محيط الدائرة . وعليه يكون ن أ = ن ب = ن حـ . وبحل معادلات ن أ ، ن ب ، ن حـ جبرياً نحصل على مركز الدائرة ونصف قطرها .



ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

نفرض أن مركز الدائرة ن $\equiv$ (د ، هـ) .

$\because \overline{\text{ن أ}}^{٢} = \overline{\text{ن ب}}^{٢} = \overline{\text{ن حـ}}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

$\because \overline{\text{ن أ}}^{٢} = \overline{\text{ن ب}}^{٢}$

$\therefore (\text{د} - ٦)^{٢} + (\text{هـ} - ٥)^{٢} = (\text{د} - ١)^{٢} + (\text{هـ} - ٣)^{٢}$

$١٠\,\text{ء} + ٤\text{هـ} - ٥١ = ٠$ (١)

، $\overline{\text{ن ب}}^{٢} = \overline{\text{ن حـ}}^{٢}$

$\therefore (\text{د} - ١)^{٢} + (\text{هـ} - ٣)^{٢} = (\text{د} - ٥)^{٧} + (\text{هـ} + ٧)^{٢}$

$\therefore ٢\text{د} - ٥\,\text{هـ} - ١٦ = ٠$ (٢)

من (١) ، (٢) : ن = $\left(\frac{١١}{٢} ، -١\right)$.

$\text{نق}^{٢} = \overline{\text{ن أ}}^{٢} = \left(٦ - \frac{١١}{٢}\right)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = \frac{١٤٥}{٢}$

معادلة الدائرة :

$\left(\text{س} - \frac{١١}{٢}\right)^{٢} + (\text{ص} + ١)^{٢} = \frac{١٤٥}{٢}$

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ١١\,\text{س} + ٢\,\text{ص} - ٥ = ٠$

حل سادس :

يمكن التفكير فى هذا الحل على النحو التالى :

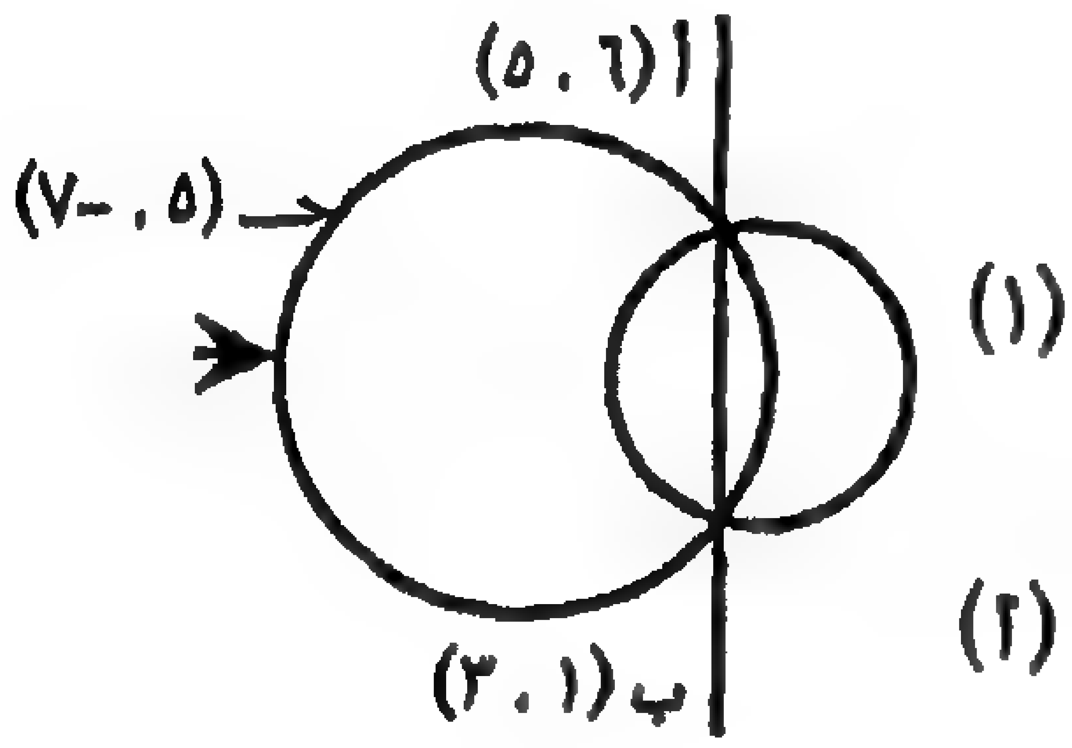
المعادلة : [$س^2$ + $ص^2$ + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ] + م [أ س + ب ص + حـ]
= صفر

تمثل معادلة دائرة مهما كانت قيمة م العددية .

وعليه . يمكن أخذ أى نقطتين أ ، ب (مثلا) الواقعتين عل محيط الدائرة ثم نوجد :

* معادلة المستقيم أ ب .
* معادلة الدائرة بدلالة نهايتى قطر فيها .

وبعد ذلك . نكون المعادلة السابقة الذكر ، ونعوض فيها بإحداثيات النقطة (حـ) لإيجاد قيمة المتغير م فى هذه الحالة .



ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

بفرض أن أ ب قطر فى الدائرة :

∴ معادلة $\overline{أ ب}$: ٢ س - ٥ + ١٣ = ٠ (١)

معادلة الدائرة التى فيها $\overline{أ ب}$ قطر ، هى :

$س^2$ + $ص^2$ - ٧ س - ٨ ص + ٢١ = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) :

معدالة الدائرة المطلوبة هي :

($س^2$ + $ص^2$ - ٧ س - ٨ ص + ٢١) + م (٢ س - ٥ ص + ١٣) = ٠ (٣)

النقطة حـ (٥ ، -٧) تحقق المعادلة (٣) لأنها تقع على محيط الدائرة .

بالتعويض عن النقطة حـ (٥ ، -٧) فى (٣) نحصل على :

م = ٢

بالتعويض عن قيمة م فى (٣) ، نحصل على المعادلة المطلوبة وهى :

$س^2$ + $ص^2$ - ١١ س + ٢ ص - ٥ = ٠

رابعاً : أمثلة من النهايات

مثال رقم (١) :

أوجد $$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$$

يمكن التفكير في هذا المثال على النحو التالي :

حيث أن المقدار $\text{س}^{٣} - ٢٧$ على صورة فرق بين مكعبين ، فإنه يمكن تحليل هذا المقدار إلى عوامله ، وهي $(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٩)$ ثم اختصار كل من البسط والمقام على العامل الصفري وهو $(\text{س} - ٣)$ ، وفي النهاية التعويض عن س = ٣ .

أيضاً يمكن التفكير في نفس المثال بطريقة أخرى وهي :

يمكن وضع المقدار على صورة النظرية :

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن} - ١}$$

وذلك بوضع ٢٧ على صورة أسية ، أي على صورة $٣^{٣}$ ؛ ثم تطبيق النظرية السابقة على المقدار المطلوب إيجاد نهايته .

ويمكن تسجيل الحل بإحدى الطريقتين التاليتين :

الحل الأول :

$$\text{المقدار} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣ + ٩)}{(\text{س} - ٣)}$$

$$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٩)$$

$$= ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$$

الحل الثاني :

$$\text{المقدار} = \underset{\text{س} - ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - (٣)^{٣}}{\text{س} - ٣}$$

$$= ٣(٣)^{٣-١} = ٣ \times ٩ = ٢٧$$

مثـال (٢) :

أوجد $\lim\limits_{٢س + ١ \to ٠} \dfrac{٣٢ س^{٥} + ١}{١٦ س^{٤} - ١}$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

نحاول وضع المسألة بحيث يمكن تطبيق النتيجة التالية :

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن - م}$$

لكن تطبيق النتيجة السابقة على المثال السابق ، يبدو صعباً لأن الإشارة بين حدى البسط فى المثال موجبة ، وحيث أن (+) = (-) × (-) ، وبذا يمكن وضع المثال السابق فى صورة يسهل معها ، تطبيق النتيجة السابقة عليها .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$$\lim_{٢س + ١ \to ٠} \frac{٣٢ س^{٥} + ١}{١٦ س^{٤} - ١}$$

$$= \lim_{٢س \to -١} \frac{(٢س)^{٥} - (-١)^{٤}}{(٢س)^{٤} - (-١)^{٥}}$$

$$= \frac{٥}{٤} \times (-١)^{٥-١}$$

$$= \frac{٥}{٤}$$

مثـال (٣) :

أوجد $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^{\frac{١٧}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}}}{س^{\frac{٨}{٣}} + س^{-\frac{١}{٣}}}$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

بالنظر إلى حدود كل من البسط والمقام ، نستطيع أن ندرك بسهولة أن هناك عاملاً مشتركاً بين حدود كل من البسط والمقام . وعليه ، تقوم فكرة الحل على أساس أخذ العامل المشترك بين حدود كل من البسط والمقام ، ثم تطبيق القاعدة :

$$\underset{س \to أ}{\text{نهــا}} [د_1(س) \times د_2(س)] = \underset{س \to أ}{\text{نهــا}} د_1(س) \times \underset{س \to أ}{\text{نهــا}} د_2(س)$$

ومراعاة ما سبق ذكره عند حل المثال السابق .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$$\underset{س \to -1}{\text{نهــا}} \frac{س^{\frac{17}{3}} + س^{\frac{2}{3}}}{س^{\frac{8}{3}} + س^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} \frac{س^{\frac{2}{3}} (س^5 + 1)}{س^{-\frac{1}{3}} (س^3 + 1)}$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} س \times \underset{س \to -1}{\text{نهــا}} \frac{س^5 - (-1)^5}{س^3 - (-1)^3}$$

$$= (-1) \times \frac{5}{3} (-1)^2$$

$$= -\frac{5}{3}$$

مثـال (٤) :

أوجد $\underset{س \to 1}{\text{نهــا}} \frac{(3س - 2)^{15} - (2س - 1)^{17}}{س^2 - 5 س + 4}$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

نحاول تجزئة الحد الكسرى الوارد بالمثال إلى حدين كسرين ، بحيث يمكن وضع كل منها على صورة النتيجة التي سبق ذكرها فى مثال (٢) .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{(3\text{س}-2)^{15} - (2\text{س}-1)^{17}}{\text{س}^{2} - 5\,\text{س} + 4}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{[(3\text{س}+2)^{15} - 1] - [(2\text{س}-1)^{17} - 1]}{(\text{س}-1)(\text{س}-4)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{[(3\text{س}-2)^{15} - 1] - [(2\text{س}-1)^{17} - 1]}{(\text{س}-1)}$$

$$\times \lim_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\text{س}-4}$$

$$= \Bigg[3 \times \lim_{3\text{س}-2 \to 1} \frac{(3\text{س}-2)^{15} - 1^{15}}{(3\text{س}-2) - (1)}$$

$$- 2 \times \lim_{2\text{س}-1 \to 1} \frac{(2\text{س}-1)^{17} - 1^{17}}{(2\text{س}-1) - (1)} \Bigg]$$

$$\times \lim_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\text{س}-4}$$

$$= [3 \times 15 - 2 \times 17] \times -\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{11}{3}$$

مثـال (٥) :

إوجد $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \dfrac{\text{١٠ + ١٣ + ١٦ + . . . + (٦ن +٧)}}{\text{١٠ + ١٢ + ١٤ + . . . + (٦ن +٨)}}$ نهـا

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

حيث أن حدود كل من البسط والمقام فى صورة متوالية عددية . فنحاول إيجاد مجموع حدود كل من البسط والمقام .

وحيث أن : ن $\longrightarrow$ ∞ فإننا نقسم حدود مجموع كل من البسط والمقام على الحد المرفوع لأكبر قوة للتخلص من الحدود المرفوعة للأسس (ن) وذلك تطبيقاً للقاعدة : $\left(\dfrac{\text{١}}{\text{ن}}\right) \longrightarrow$ الصفر عندما ن $\longrightarrow$ ∞ .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$\text{حـ}_{\text{١}}$ (مجموع حدود البسط) = ن (١٧ + ٦ ن) = ١٧ ن + ٦ $\text{ن}^{\text{٢}}$

$\text{حـ}_{\text{٢}}$ (مجموع حدود المقام) = ٣ ن (٣ ن + ٩) = ٩ $\text{ن}^{\text{٢}}$ + ٢٧ ن

$$\lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{حـ}_{\text{١}}}{\text{حـ}_{\text{٢}}}$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\frac{\text{١٧}}{\text{٩ن}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}}{\text{١} + \frac{\text{٣}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{١٧}}{\infty} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}}{\text{١} + \frac{\text{٣}}{\infty}}$$

$$= \frac{\text{صفر} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}}{\text{١} + \text{صفر}}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

مثال (٦) :

أوجد

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{٦ \times ٢^{ن} + ٤ \times ٥^{-ن}}{٨ \times ٧^{-ن} - ٩ \times ٢^{-ن}}$$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

نحاول التخلص من الحدود المرفوعة لأسس سالبة ؛ وذلك بضرب حدود البسط والمقام × $٧^{ن}$ ، ويكون الكسر فى الصورة التالية :

$$\frac{٦ + ٤\left(\frac{٢}{٥}\right)^{ن}}{٨\left(\frac{٣}{٧}\right)^{ن} - ٩}$$

وهنا ، يمكن تطبيق القاعدة : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن}$ حيث ب $>$ أ ⟵ الصفر عندما ن ⟵ ∞ .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{٦ \times ٢^{-ن} + ٤ \times ٥^{-ن}}{٨ \times ٧^{-ن} - ٩ \times ٢^{-ن}} \times \frac{٢^{ن}}{٢^{ن}}$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \frac{٦ + ٤\left(\frac{٢}{٥}\right)^{ن}}{٨\left(\frac{٣}{٧}\right)^{ن} - ٩}$$

$$= \frac{٦ + ٤\left(\frac{٢}{٥}\right)^{\infty}}{٨\left(\frac{٣}{٧}\right)^{\infty} - ٩}$$

$$= -\frac{٢}{٣}$$

مثال (٧) :

أوجد قيمة

$$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}$$

يمكن التفكير فى حل هذا المثال كما يلى :

إذا عوضنا عن س = ١ فإننا نحصل على كمية غير معينة ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$)

إذن يجب التخلص من العامل الصفرى عن طريق ضرب حدى الكسر فى مرافق المقام ، كما يلى :

$$\frac{\text{س} - 1}{\sqrt{3\text{س} - 2} - \sqrt{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \frac{(\text{س} - 1)\left[\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}\right]}{(3\text{س} - 2) - \text{س}}$$

وهنا ، يجب قسمة حدى الكسر على (س − ١) قبل التعويض بالنهاية للتخلص من العامل الصفرى .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$$\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{3\text{س} - 2} - \sqrt{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - 1)\left[\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}\right]}{2(\text{س} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \left[\sqrt{3\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 + 1)$$

$$= 1$$

خامساً : أمثلة من التفاضل :

مـــثال (١) :

إذا كانت ص = ع^{٢} − ٥ ع + ٧ ، ع = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} − ٢

فإثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٩ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ −٢ س^{٧} = صفر

يمكن التفكير فى هذا المثال على النحو التالى :

∵ ص = د (ع) ، ع = د (س)

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ × $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

إذن ، يمكن إيجاد قيمة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، والتعويض عنها فى الطرف الأيمن المطلوب إثباته .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ = ٢ ع − ٥ ، $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = ٢ س^{٣}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ = (٢ ع − ٥) × ٢ س^{٣} = ٢ س^{٧} − ١٨ س^{٣}

الطرف الأيمن = (٢س^{٧} − ١٨س^{٣}) + ٩(٢س^{٣}) − ٢س^{٧}

= صفر .

مثـــال (٢) :

للمنـحنى ص = س^{٣} − ١٢ س + ٣ نهاية صغـرى عند أ ، وأخرى عظمي عند حـ . ولـلمـنحـنى ٩ ص = س^{٣} − ٢٧ س + ١٨ نهـاية عظـمى عند ب ، و أخـرى صغرى عند ء . إحسب مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

يمكن إيجاد مساحة الشكل أ ب حـ ء عن طريق تقسيمه إلى مثلثين ، ثم إيجاد مساحة كل منهما . وعليه ، تقوم فكرة الحل على أساس محاولة إيجاد رءوس الشكل الرباعى أ ب حـ ء .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

بالنسبة للمنحنى الأول :

ص = س^{٣} − ١٢ س + ٣ (١)

صَ = ٣ س^{٢} − ١٢ (٢)

صً = ٦ س (٣)

بوضع صَ = ٠ فى (٢) نحصل على س = ± ٢

من (٣) : س = ٢ ⟵ صً = + (نهاية صغرى) .

، س = − ٢ ⟵ صً = − (نهاية عظمى) .

بالتعويض عن قيم س فى (١) نحصل على .

أ ≡ (٢ ، −١٣) نهاية صغرى .

، حـ ≡ (−٢ ، ١٩) نهاية عظمى .

بالنسبة للمنحنى الثانى :

ص = $\frac{١}{٩}$ س^{٣} − ٣ س + ٢ (١)

صَ = $\frac{١}{٣}$ س^{٢} − ٣ (٢)

صً = $\frac{٢}{٣}$ س (٣)

بوضع ص = ٠ فى (٢) نحصل على س = ± ٣

من (٣) : س = ٣ ⟵ صً = + (نهاية صغرى) .

، س = − ٣ ⟵ صً = −(نهاية عظمى) .

بالتعويض عن قيم س فى (١) نحصل على :

د $\equiv$(٣ ، -٤) نهاية صغرى .

ب $\equiv$ (-٣ ، ٨) نهاية عظمى .

<u>مساحة الشكل أ ب حـ ء</u>

معادلة الوتر ب ء : ٢ س + ص - ٢ = ٠ .

طول الوتر ب ء = ٦ $\sqrt{٥}$

طول العمود الساقط من النقطة حـ على ب ء = ع١ = $\frac{١٣}{\sqrt{٥}}$

طول العمود الساقط من النقطة أ على ب ء = ع٢ = $\frac{١١}{\sqrt{٥}}$

مساحة الشكل أ ب حـ ء = مساحة المثلث ب حـ ء + مساحة المثلث أ ب ء

= $\frac{١}{٢}$ ب ء × ع١ + $\frac{١}{٢}$ ب ء × ع٢

= ٧٢

مثـــال (٣) :

أوجد النهايات العظمى والصغرى للمنحنى ص = د (س) حيث د (س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فى س ، د (س) + دَ (س) = س (س^{٢} - ١٥) - ١ .

ويمكن التفكير فى حل هذا المثال علي النحو التالى :

الدالة د (س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فى س ، فتكون على الصورة :

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

وعليه ، يمكن إيجاد د (س) كما يلى :

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ

بجمع د(س) ، دَ (س) ثم مساواة المعاملات بين المعادلة المستنتجة ، والمعادلة المعطاة يمكن إيجاد القيم العددية للمعاملات : أ ، ب ، حـ ، ء ، وبذا يمكن إيجاد الدالة د (س) . وبالتالى يمكن تحديد قيم النهايات العظمى والصغرى للدالة .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

د (س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء (١)

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على :

د(س) + دَ(س) = أ س^{٣} + (ب +٣أ) س^{٢} + (حـ +٢ب) س + (د +حـ) (٣)

ولكن ، د(س) + دَ(س) = س^{٣} – ١٥ س – ١ (٤)

بمساواة المعاملات فى المعادلتين (٣) ، (٤) نحصل على :

أ = ١ ، ب = -٣ ، حـ = -٩ ، ء = ٨

د (س) = س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س + ٨ (٥)

دَ (س) = ٣س^{٢} – ٦س – ٩ (٦)

دً (س) = ٦ س – ٦ (٧)

بوضع دَ (س) = ٥ فى (٦) نحصل على :

س = ٣ ، س = -١

من (٧) : س = ٣ ⟵ دً (س) = + (نهاية صغرى) .

، س = -١ ⟵ دً (س) = – (نهاية عظمى) .

بالتعويض عن قيم س فى (٥) ، نحصل على :

(٣ ، -١٩) نهاية صغرى ، (-١ ، ١٣) نهاية عظمى .

مثال (٤) :

إثبت أن للدالة : ١٠ س^{٦} − ١٢س^{٥} + ١٥س^{٤} − ٢٠س^{٣} + ٢٠ نهاية صغري عند س = ١ ، ولا يوجد لها نهايات عظمى أو صغرى أخرى .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

- التحقق من وجود نهاية صغرى عند س = ١ بإستخدام أساليب الحل المعتادة ، التى وردت فى حل الأمثلة السابقة .

- التحقق من عدم وجود نهايات صغري أو عظمي عند بقية القيم التى تحقق الدالة ، وذلك لكونها قيماً تخيلية ، أو لعدم تحقيق شروط النهايات العظمى والصغرى .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

ص = ١٠ س^{٦} − ١٢س^{٥} + ١٥س^{٤} − ٢٠س^{٣} + ٢٠ (١)

صَ = ٦٠ س^{٥} − ٦٠س^{٤} + ٦٠س^{٣} − ٦٠س^{٢} (٢)

صً = ٣٠٠ س^{٤} − ٢٤٠س^{٣} + ١٨٠س^{٢} − ١٢٠ س (٣)

بوضع صَ = ٠ فى (٢) نحصل على :

٦٠ س^{٢} (س−١) (س^{٢} +١) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ١ ، س^{٢} = −١ (جذور تخيلية)

عند س = ٠

بأخذ س = −٠٫١ < ٠ ⟵ صَ = −

بأخذ ص = +٠٫١ > ٠ ⟵ صَ = −

حيث أن صَ لم تتغير إشارتها .

∴ لا توجد عند س = ٠ نهاية عظمي أو صغري .

<u>عند س = ١</u>

صً = +

∴ توجد عند س = ١ فقط نهاية صغرى .

مـثال (٥)

إذا كانت الازاحتين لنقطة متحركة فى مستو، هما س = $\frac{\text{ن}^{٢}}{٢}$ ، ص = ٨ $\sqrt{\text{ن}}$

أوجد :

(أ) معادلة المسار مستندة إلى المحورين السينى والصادى .

(ب) أوجد اللحظة التى يكون عندها إتجاه سرعة الجسم عمودياً على إتجاه عجلته .

تقوم فكرة حل المطلوب الأول على أساس محاولة حذف المتغير (ن) من المعادلتين . وتقوم فكرة حل المطلوب الثانى على أساس أن :

$\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} = -١$ حيث $\text{م}_{١}$ هو إتجاه سرعة الجسم ، $\text{م}_{٢}$ هو اتجاه عجلة الجسم .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$\text{ن}^{٢}$ = ٢ س . . . . (١)

$\text{ن}^{٢}$ = $\text{ص}^{٤}$ ÷ $(٦٤)^{٢}$ . . . . (٢)

من (١)، (٢) :

معادلة المسار : $\text{ص}^{٤}$ = ٨١٩٢ س

س = $\frac{\text{ن}^{٢}}{٢}$ ⟵ $\text{ع}_{١}$ = ن ⟵ $\text{حـ}_{١}$ = ١

ص = ٨ $\sqrt{\text{ن}}$ ⟵ $\text{ع}_{٢} = \frac{٤}{\sqrt{\text{ن}}}$ ⟵ $\text{حـ}_{٢} = \frac{-٢}{\text{ن}^{\frac{٣}{٢}}}$

ظا هـ = $\frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} = \frac{-٤}{\text{ن}^{\frac{٣}{٢}}}$

، ظا ل = $\frac{\text{حـ}_{٢}}{\text{حـ}_{١}} = \frac{-٢}{\text{ن}^{\frac{٣}{٢}}}$

∴ ظا هـ × ظا ل = -١

∴ $\text{ن}^{٣}$ = ٨ ومنها ن = ٢ ث

مثــال (٦) :

هرم ثلاثى منتـظم طول كل حـرف من أحـرفـه ١٠ سـم . فـإذا زادت الأحــرف بمعدل ٠٤ر٠ سم/د . إوجد معدل زيادة حجم الهرم .

يمكن التفكير فى حل المثال كما يلى :

كـى يمكن تكوين المعادلة الزمنيـة المرتبطة ، يجب معرفة الخــواص الهندسية للهرم الثلاثى المنتظم ، أي يجب معرفة :

* طول الحرف الجانبى = طول ضلع القاعدة .
* حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع .

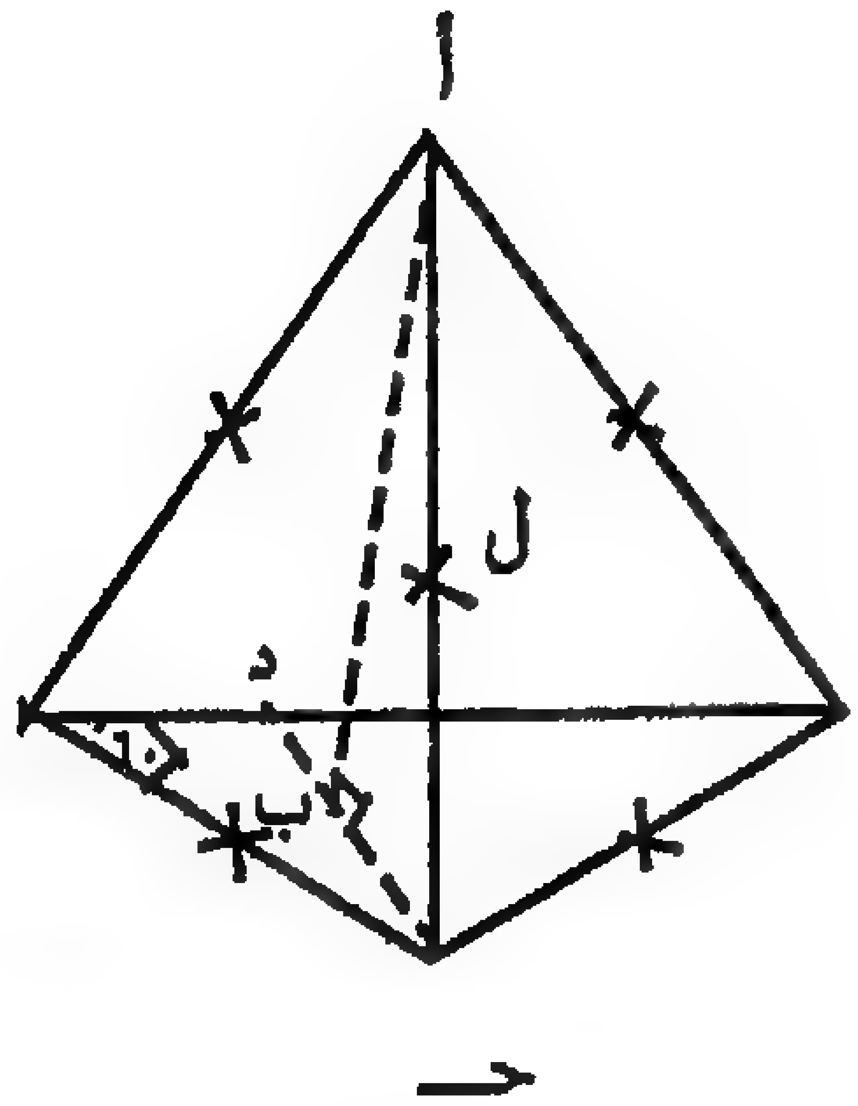
وعليه ، يجب حساب إرتفاع الهرم لإيجاد حجمه .

وبعد إيجـاد حجم الهرم ، نكون المعـادلة الزمنية المرتبطة ، حسب معطيات المثال .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

∵ الهرم ثلاثى منتظم .

∵ طول الحرف الجانبى = طول ضلع القاعدة = ل .



$$\text{ء حـ} = \text{ل حا } ٦٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ل}$$

$$\text{ب حـ} = \frac{٢}{٣}\,\text{ء حـ} = \frac{\text{ل}}{\sqrt{٣}}$$

المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب .

حيث أن : أ ب = ع = ارتفاع الهرم .

$$\therefore \text{ع}^{٢} = \overline{\text{أحـ}}^{٢} - \overline{\text{ب حـ}}^{٢}$$

$$\text{ع} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\,\text{ل}$$

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع .

$$ح = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\,ل^{2}\,\text{حا}\,60\right] \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,ل$$

$$ح = \frac{1}{6\sqrt{2}}\,ل^{3}$$

$$\frac{د\,ح}{د\,ن} = \frac{د\,ح}{د\,ل} \times \frac{د\,ل}{د\,ن} = \frac{ل^{2}}{2\sqrt{2}} \times \frac{د\,ل}{د\,ن}$$

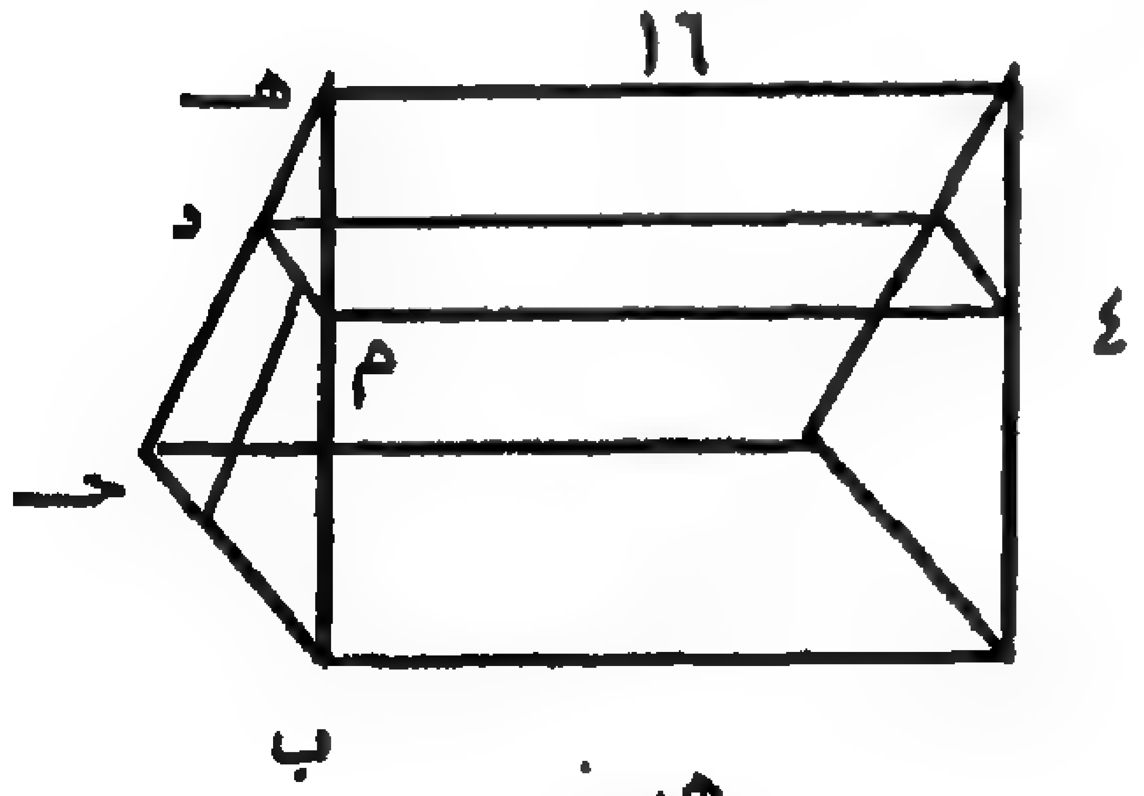
عند ل = ١٠ :

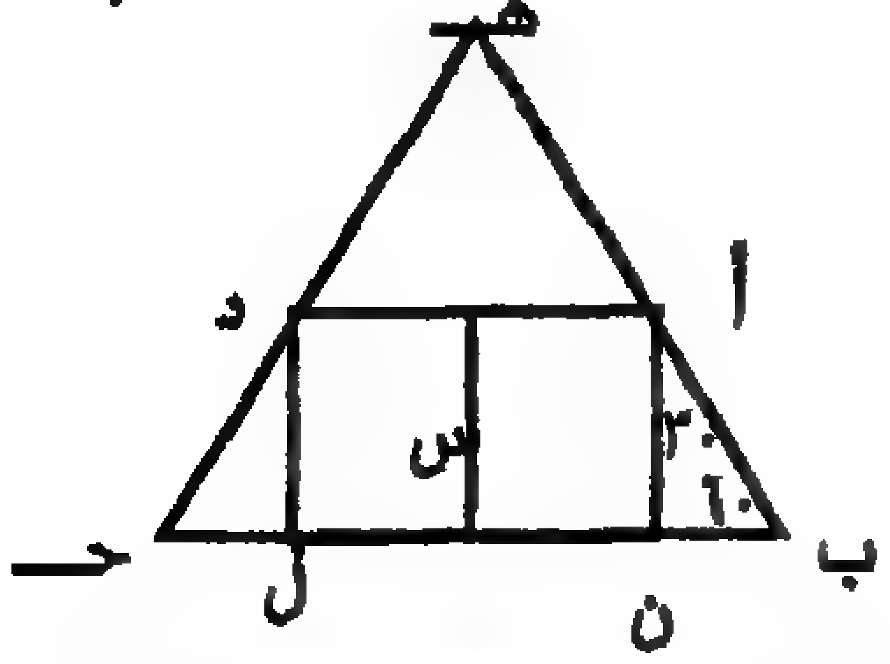
$$\frac{د\,ح}{د\,ن} = \frac{50}{\sqrt{2}} \times 0{,}04 = \sqrt{2}\ \text{سم}^{3}/\text{د}.$$

مثـــال (٧) :

حوض علي شكل منشور قائم جانباه مثلثان رأسيان متساويا الأضلاع ، طول ضلعه ٤ قدم ، وارتفاع المنشور ١٦ قدم ، ويشتمل على ماء ينصرف منه فى كل دقيقة مكعبان . إوجد معدل إنخفاض الماء عندما يكون عمق الماء = $\sqrt{3}$ قدم .

تقوم فكرة الحل علـى أساس معـرفة الخواص الهندسـية للمنشـور القائم ، وبذا يمكن إيجاد حجم المنشور ، ثم تكوين المعادلة الزمنية المرتبطة .





ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

المثلث هـ ب حـ متساوي الأضلاع .

، المثلث أ ن ب ثلاثينى ستينى .

، المثلث د ل حـ ثلاثيني ستينى .

أ ن = د ل = س (إرتفاع الماء) .

، ب ن = ل حـ = $\frac{س}{\sqrt{3}}$

، أ د = ن ل = ب حـ - ٢ ب ن

$= 4 - \frac{2س}{\sqrt{3}}$

مساحة شبه المنحرف أ ب حـ د $= \dfrac{٤ + \left(٤ - \dfrac{س^{٢}}{\sqrt{٣}}\right)}{٢} \times س$

$= \left(٤\,س - \dfrac{س^{٢}}{\sqrt{٣}}\right)$.

حجم الماء = مساحة القاعدة × الارتفاع .

$ح = \left(٤\,س - \dfrac{س^{٢}}{\sqrt{٣}}\right) \times ١٦$

$\dfrac{د\,ح}{د\,ن} = \dfrac{د\,ح}{د\,س} \times \dfrac{د\,س}{د\,ن}$

$٢ = ٣٢ \times \dfrac{د\,س}{د\,ن}$

∴ معدل انخفاض الماء $= \dfrac{د\,س}{د\,ن} = \dfrac{١}{١٦}$ قدم / د.

سادساً : أمثلة من التكامل :

مثال (١) :

إذا كانت $\dfrac{د\,ر}{د\,س} = ٣\,س^{٢} - ٢س$ ، $\dfrac{د\,هـ}{د\,س} = ١٢\,س^{٢}\,(س+١)$ ، وإذا كانت ر = ٢ هـ = ٤ عندما س = ٠ ، فأوجد $\dfrac{د}{د\,س}(ر\,هـ)$ عندما س = ١ .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

يمكن بإستخدام التكامل إيجاد كل من الدالتين ر، هـ مع مراعاة أنه يمكن التخلص من ثابت التكامل في كل من التكاملين السابقين بإستخدام الشروط المعطاه فى المثال .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$\int$ د ر = $\int$ (٣س^{٢} – ٢س) . د س .

ر = س^{٣} – س^{٢} + ث (١)

عند س = ٠ ⟵ ر = ٤ ومنها ث = ٤

من (١) : ر = س^{٣} – س^{٢} + ٤ (٢)

$\int$ د هـ = $\int$ (١٢ س^{٣} + ١٢ س^{٢}) . د س

هـ = ٣ س^{٤} + ٤ س^{٣} + ث$_{١}$ (٣)

عند س = ٠ ⟵ هـ = ٢ ومنها ث$_{١}$ = ٢

من (٣) : هـ = ٣ س^{٤} + ٤ س^{٣} +٢ (٤)

من (٢) ، (٤) :

ر × هـ = (س^{٣} – س^{٢} +٤) (٣س^{٤} + ٤ س^{٣} + ٢)

$\left[\frac{د}{د س} (ر × هـ) \right]$ = ١٠٥
س = ١

مثال (٢) :

إوجد معادلة العمودى على المماس لمنحنى عند نقطة عليه إحداثيها السينى = ٢ . ويكون ميل المماس للمنحني عندها يعطى بالعلاقة : $\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - ٢ س}{٢ ص}$ علما بأن النقطة (٠ ، $\sqrt{١١}$) تقع على المنحنى .

يمكن التفكير في حل هذا المثال كما يلى :

يمكن إيجاد الدالة ص = د(س) بإستخدام القاعدة :

$$\text{الدالة ص = د(س)} \quad \underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{تفاضل}}{\rightleftarrows}} \quad \text{ميل المماس للمنحنى} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

وبذا يمكن إيجاد إحداثيات النقط التى تقع على المنحنى ، وبالتالى يمكن إيجاد معادلة العمودى .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$\int$ ٢ص . د ص = $\int$ (١ - ٢ س) . د س

ص^{٢} = س - س^{٢} + ث (١)

النقطة (٠ ، $\sqrt{١١}$) تحقق المعادلة (١) لأنها تقع على المنحنى :

من (١) : ث = ١١

، ص^{٢} = س - س^{٢} + ١١

عند س = ٢ ⟵ ص^{٢} = ٩ ⟵ ص = ± ٣

.·. النقطتان (٢ ، ٣) ، (٢ ، -٣) تقعان على المنحنى .

<u>عند النقطة (٢ ، ٣) :</u>

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ميل المماس = - $\frac{١}{٢}$

.·. ميل العمودى = + ٢

معادلة العمودى : ٢س - ص - ١ = ٠

<u>عند النقطة (٢ ، -٣) :</u>

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ميل المماس = $\frac{١}{٢}$

ميل العمودى = -٢

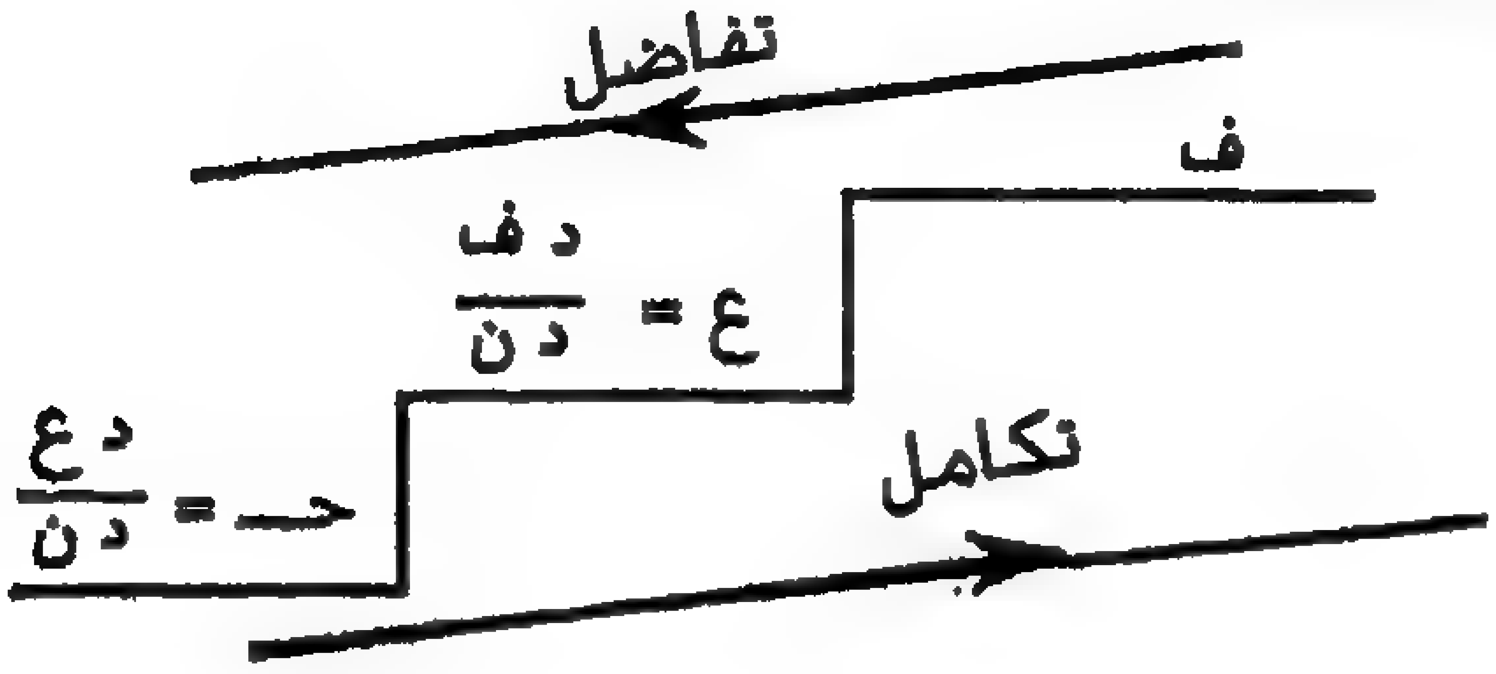
معادلة العمودى : ٢ س + ص - ١ = ٠

مثـــال (٣) :

إذا كانت مـركبتا العـجلة فـى إتجاه محـور السـينات والصادات لجسم يتـحرك فى مسـتـوي هما : حـ$_{س}$ = ٠ ، حـ$_{ص}$ = -٣٢ . وعجلة بدء الحـركة كانت ع$_{س}$ = ٨٠ قـدم / ث ، ع$_{ص}$ = ٦٠ قـدم /ث ، س = ٠ ، ص = ٠ ، إوجـد معادلة المسار.

يمكن التفكير فـى حل هذا المثال على النحو التالـى :

إستخدام القاعدة التالية :



يمكن إيجـاد س (معـادلة المســار فـى الإتجاه الأفـقـى) ، وإيجـاد ص (معـادلة المســار فـى الإتجاه الرأسـى) ، وبحل مـعادلتـى س ، ص مـعـا ، يمكن إيجـاد معـادلة المسار.

ويمكن تسـجيل الحل كما يلـى :

بالنسبة لمحور السينات :

$\because$ ع$_{س}$ = $\int$ حـ$_{س}$. د ن

$\therefore$ ع$_{س}$ = أ   حيث أ مقدار ثابت

عند بدء الحركة كانت ع$_{س}$ = ٨٠ $\longleftarrow$ أ = ٨٠

$\because$ ف$_{س}$ = $\int$ ع$_{س}$. د ن

$\therefore$ ف$_{س}$ = $\int$ ٨٠ . د ن = ٨٠ ن + ث$_{١}$

عند ن = ٠ $\longleftarrow$ ف$_{س}$ = ٠   ومنها ث$_{١}$ = ٠

$\boxed{\text{س = ٨٠ ن}}$ (١)

بالنسبة لمحور الصادات :

$\because$ $ع_{ص} = \int ح_{س} \cdot د ن$

$\because$ $ع_{ص} = \int -٣٢ \cdot د ن \quad = \; -٣٢ ن + ث_{١}$

عند ص = ٠ $\longleftarrow$ $ع_{ص}$ = ١٦٠ منها $ث_{١}$ = ١٦٠

$ع_{ص} = -٣٢ ن + ١٦٠$

$\therefore$ $ف_{ص} = \int ع_{ص} \cdot د ن$

$\because$ $ف_{ص} = \int (-٣٢ ن + ١٦٠) \cdot د ن$

$= -١٦ ن^{٢} + ١٦٠ ن + ث_{٢}$

عند ن = ٠ $\longleftarrow$ $ف_{ص}$ = ٠ ومنها $ث_{٢}$ = ٠

$$\boxed{ص = -١٦ ن^{٢} + ١٦٠ ن} \qquad (٢)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) لحذف ن نحصل على معادلة المسار ، وهى :

$\therefore$ $٤٠٠٠ ص = ٨٠٠٠ س - س^{٢}$

سابعاً : أمثلة من حساب المثلثات :

مثـال (١) :

إثبت أن : جا س جتا س (ظا س + ظتا س) = ١

الحـل :

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

حيث أن الطرف الأيسر = ١ ، إذن فلابد أن يساوى الطرف الأيمن $جا^{٢}س + جتا^{٢}س$ ، ويمكن أن يتحقق ذلك إذا عوضنا عن

ظا س بـ $\frac{جا\ س}{جتا\ س}$ ، ظتا س بـ $\frac{جتا\ س}{جا\ س}$

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

الطرف الأيمن = جا س جتا س $\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} \right)$

= جا^{٢} س + جتا^{٢} س

= ١

= الطرف الأيسر

مثـال (٢) :

إذا : (أَ + بَ + حــَ) (بَ + حــَ – أَ) = ٣ بَ جــَ .

فأوجد قيمة الزاوية أ

يمكن التفكير فى حل هذا المثال علـى أساس أن الطرف الأيمن عبارة عن تحليل لفرق بين مربعى كـميتين هما : (بَ + حــَ) ، أَ . وعليه يمكن إيجـاد العلاقة التى تربط بين أَ ، بَ ، حــَ ، والتى تقـودنا إلى اكـتشـاف العـلاقة الـتى من خلالها يمكن إيجاد قيمة الزاوية أ .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

(بَ + حــَ + أَ) (بَ + حــَ – أَ) = ٣ ب حــَ

(بَ + حــَ)^{٢} – أَ^{٢} = ٣ بَ حــَ

∴ أَ^{٢} = (بَ + حــَ)^{٢} – ٣ بَ حــَ = بَ^{٢} + حــَ^{٢} – بَ حــَ

∴ بَ^{٢} + حــَ^{٢} – ٢ بَ حــَ جتا أ = بَ^{٢} + حــَ^{٢} – بَ حــَ

∴ جتا أ = $\frac{١}{٢}$ ومنها أ = ٦٠° ، أ = ٣٠٠°

مثـال (٣) :

المثلث أ ب حــ فيه أَ ، حــَ ، بَ فى توالٍ عددى . إثبت أن :

أَ جتا ب – بَ جتا أ = ٢ (أَ – بَ) .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال كما يلى :

– التعويض بقيم جتا أ جتا ب

- إيجاد العلاقة التى تربط بين أَ ، حـَ ، بَ على أساس أن حـَ وسط عددى بين أَ ، بَ .

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى

الطرف الأيمن :

$$= \text{أَ} \left(\frac{\text{حـَ}^2 + \text{أَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{حـَ}} \right) - \text{بَ} \left(\frac{\text{بَ}^2 + \text{حـَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{حـَ}} \right)$$

$$= \frac{(\text{أَ} - \text{بَ})(\text{أَ} + \text{بَ})}{\text{حـَ}}$$

$$= \frac{(\text{أَ} - \text{بَ})(\text{أَ} + \text{بَ})}{\left(\frac{\text{أَ} + \text{بَ}}{2} \right)}$$

$$= 2\,(\text{أَ} - \text{بَ})$$

مثال (٤) :

إذا كان ظا $\frac{\text{أ}}{2}$ ظا $\frac{\text{حـ}}{2} = \frac{1}{3}$. أثبت أن : بَ هي الوسط العددى بين حـَ ، أَ .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال ، كما يلى :

* التعويض بقيم ظا $\frac{\text{أ}}{2}$ ، ظا $\frac{\text{حـ}}{2}$
* التعويض عن بَ $= \frac{\text{حـَ} + \text{أَ}}{2}$

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

$$\because \text{ظا}\,\frac{\text{أ}}{2} \times \text{ظا}\,\frac{\text{حـ}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{(\text{ح} - \text{بَ})(\text{ح} - \text{حـَ})}{\text{ح}(\text{ح} - \text{أَ})}} \times \sqrt{\frac{(\text{ح} - \text{أَ})(\text{ح} - \text{بَ})}{\text{ح}(\text{ح} - \text{حـَ})}} = \frac{1}{3}$$

∴ $\frac{ح - بَ}{ح} = \frac{1}{3}$ ومنها ٢ ح = ٣ بَ

ولكن ٢ ح = (أَ + بَ + حـَ) .

∴ أَ + بَ + حـَ = ٣ بَ

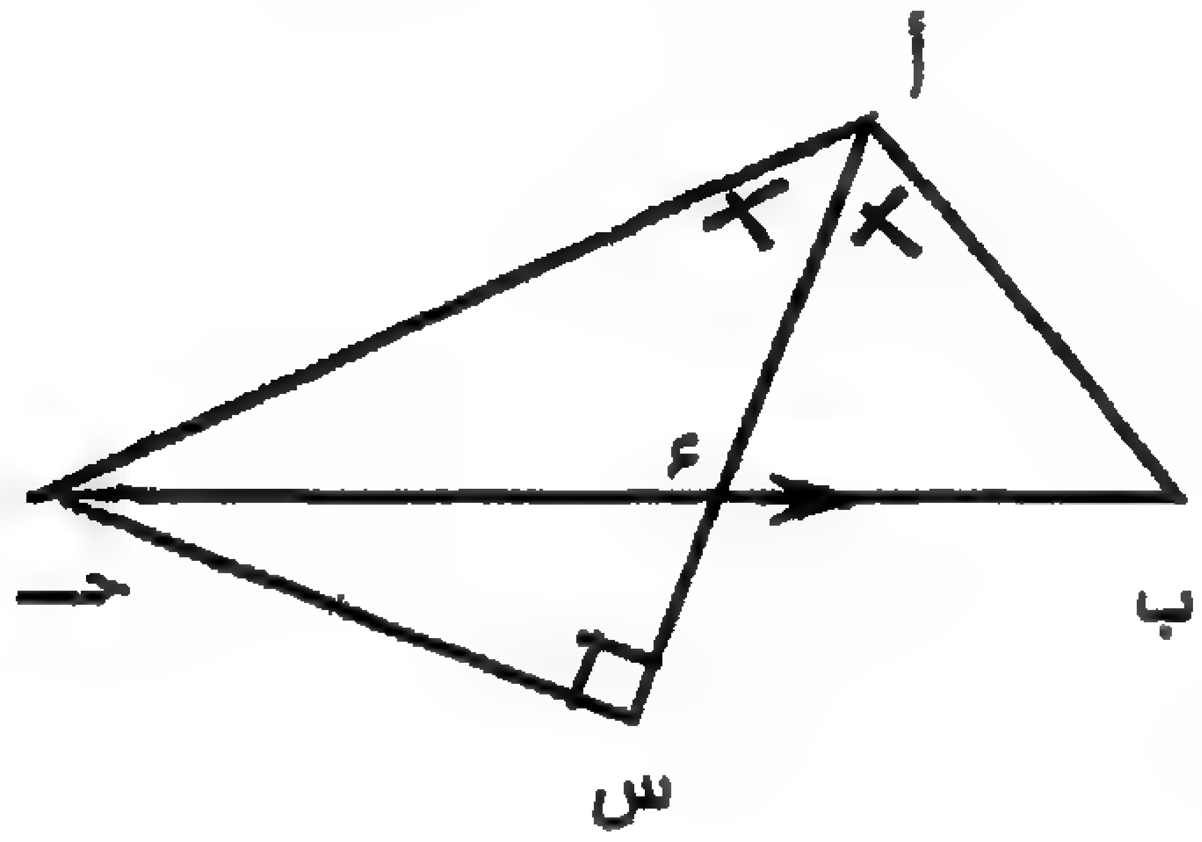
∴ (أَ + حـَ) = ٢ بَ

∴ ب هو الوسط العددى بين أَ ، حـَ

مثـال (٥) :

أ ب حـ مثلث ، نصفت زاوية أ من الداخل بالمنصف أ ء ، ثم أسقط من حـ العمود حـ س على إمتداد أ ء . إثبت أن :

$\overline{أس}^2 = \frac{بَ}{حـ} \times$ ح (ح – أَ) .



يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

المثلث أ س حـ القائم الزاوية فى س

فيه : زاوية س أ حـ = $\frac{أ}{2}$

إذن ، يمكن إيجاد العلاقة التى تربط بين $\overline{أس}$ ، والزاوية $\frac{أ}{2}$ ، وهى :

جتا $\frac{أ}{2} = \frac{\overline{أس}}{ب}$

ولكن المطلوب إيجاد $\overline{أس}^2$ ، لذا فإننا نربع طرفى المعادلة السابقة ثم نعوض عن قيمة جتا ٢ $\frac{أ}{2}$ ، فنحصل على المطلوب إثباته مباشرة .

ويمكن تسجيل الحل كما يلى :

فى المثلث أس حـ :

زاوية أس حـ = ٩٠° ، زاوية س أ حـ = $\frac{أ}{2}$

$$\text{جتا}\ \frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{أس}}{\text{ب}} \longrightarrow \overline{\text{أس}}^{\,٢} = \text{ب}^{٢}\ \text{جتا}^{٢}\ \frac{\text{أ}}{٢}$$

$$\overline{\text{أس}}^{\,٢} = \text{ب}^{٢} \times \frac{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} \times \text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\ .$$

ثامناً : أمثلة من الهندسة الفراغية :

مثـال (١) :

أب حـ د مستطيل فيه أ ب = س ، ب حـ = ص ، ن = مساحة المستطيل. فإذا كان ل = حجم الاسطوانة الناشئة عن دوران المستطيل دورة كاملة حول (س) . كان م = حجم الأسطوانة الناشئة عن دوران المستطيل دورة كاملة حول (ص) . فإثبت أن : $\overline{\text{أحـ}}^{\,٢} = \frac{\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢}}{\text{ل م}} \times \text{ن}$.

يمكن التفكير فى حل هذا المثال كما يلى :

عندما يدور مستطيل دورة كاملة حول أحد أضلاعه فإن الجسم المتولد عن الدوران عبارة عن إسطوانة إرتفاعها = طول الضلع الثابت الذى دارحوله المستطيل . ونصف قطر قاعدتها = طول ضلع المستطيل الجاور للضلع الثابت .

بإستخدام القاعدة السابقة يكون :

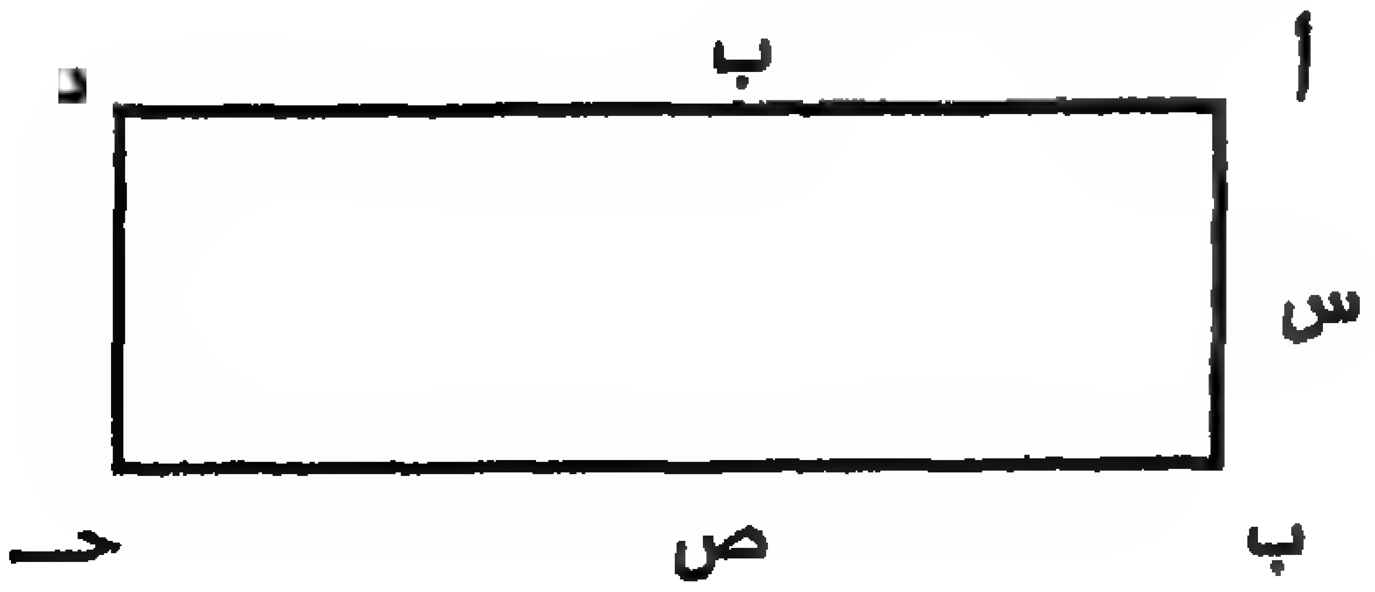
م = ط $\text{س}^{٢}$ × ص ، ل = ط $\text{ص}^{٢}$ × س

وبالتعويض عن قيم ل ، م يمكن التحقق من صحة المطلوب .

وبالنسبة لتسجيل الحل ، فيكون على النحو التالى :

م = ط $\text{س}^{٢}$ × ص

، ل = ط $\text{ص}^{٢}$ × س



$$\frac{ل^2 + م^2}{ل\ م} \times ن = \frac{ط^2 س^4 ص^2 + ط^2 ص^4 س^2}{ط\ س^3 ص^3} \times س\ ص$$

$= (س^2 + ص^2)$

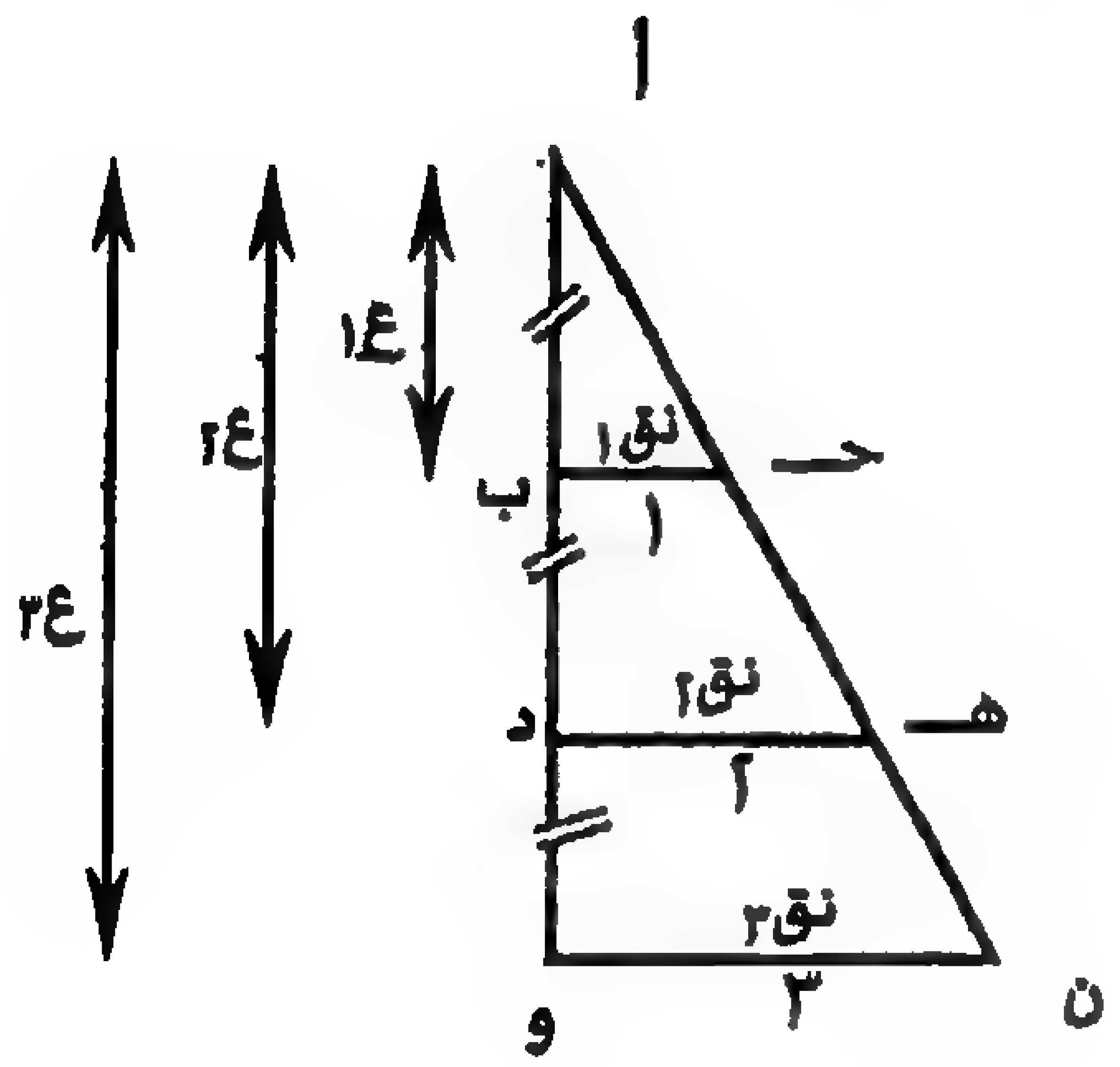
$= \overline{أ حـ}^2$

مثـــال (٢) :

إذا رسم مستويان يوازيان قـاعدة مخروط دائرى قائم . ويقسـمان ارتفاعه إلى ثلاثة أقسام متساوية . فبين أن حجـوم الأجزاء الثلاثة الحادثة التى انقسم إليها المخروط تتناسب مع ١ ، ٧ ، ١٩ .

يمكن التفكير فى حل هذا المثال على النحو التالى :

بإستخدام القاعدة التالية :



إذا قطـع مـسـتـوي سـطح مـخـروط دائرى قـائم بحيث كـان عـمـودياً على محـوره (أى يوازي قـاعـدة المخـروط) فـإن جزء المخروط الحـادث الذى قـاعـدتـه هى المقطع القـائم . ورأسـه هورأس المخـروط الأصلى يكون مخروطاً قائماً .

∵ تتشابه المثلثات الثلاثة : أ ب حـ ، أ ء هـ ، أ و ن

$$\therefore \frac{ع_1}{نق_1} = \frac{ع_2}{نق_2} = \frac{ع_3}{نق_3}$$

بإستخدام التناسب السابق . يمكن إيجاد النسبة بين $ح_1 : ح_2 : ح_3$.

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

$$\frac{ح_1}{ح_2} = \frac{نق_1^2 \times ع_1}{٤\ نق_1^2 \times ٢\ ع_1} = \frac{١}{٨}$$

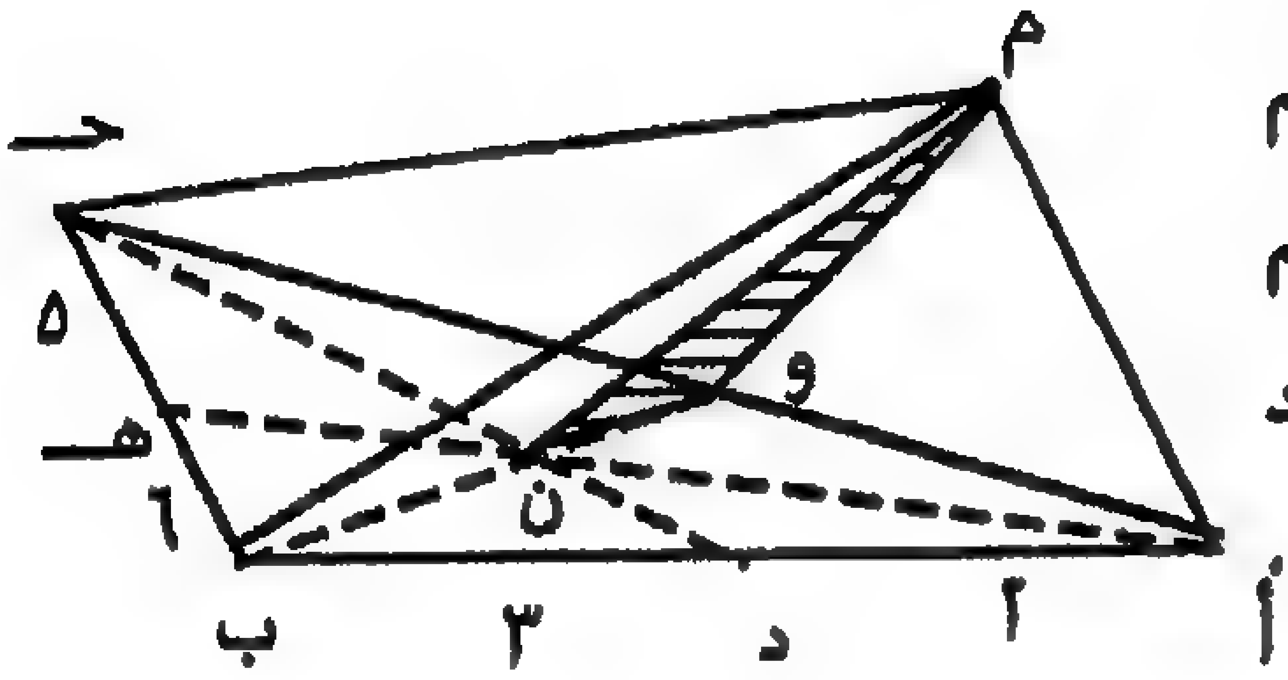
$$\frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_3} = \frac{\text{نق}_1^2 \times \text{ع}_1}{9\ \text{نق}_1^2 \times 3\ \text{ع}_1} = \frac{1}{27}$$

$$\text{ح}_1 : \text{ح}_2 : \text{ح}_3 = 1 : 8 : 27$$

.·. ينقسم المخروط إلى ثلاثة أجزاء تتناسب حجومها مع ١ ، ٧ ، ١٩ .

مثال (٣) :

م أ ب حـ هرم ثلاثى . قسم أ ب من الداخل فى ء بنسبة ٢ : ٣ ، قسم ب حـ من الداخل فى هـ بنسبة ٦ : ٥ ، ثم وصل أ هـ ، حـ ء فتقاطعا فى ن ، ثم وصل ب ن ، ومد فلاقى أ ب فى و . إوجد النسبة بين حجمى الهرمين م أ ن و ، م ن و حـ .



يمكن التفكير فى حل هذا التمرين على هذا النحو :

حيث أن الهرمين م أن و ، م ن و حـ مشتركان فى الارتفاع ، فإن النسبة بين حجميها تكون كالنسبة بين مساحتي قاعدتيهما ، أى كالنسبة بين المثلثين أ ن و ، حـ ن و .

ولكن النسبة بين مساحتى المثلثين أ ن و ، حـ ن و تكون كالنسبة بين أ و ، و جـ لأنهما متحدان فى الإرتفاع .

فى ضوء ما تقدم ، تقوم فكرة الحل على محاولة إيجاد النسبة بين أ و ، و حـ ، ويتحقق ذلك كما يلى :

في المثلث أ ب جـ ، تتقاطع المستقيمات أ هـ ، ب و ، ج ء جميعا فى نقطة واحدة (ن). وعليه ، يمكن إيجاد النسبة أ و : و حـ بتطبيق نظرية (شيفا) وبذا يمكن تحقيق المطلوب فى المثال .

ويمكن تسجيل الحل كمايلى :

$$\frac{\text{حجم الهرم م أ ن و}}{\text{حجم الهرم م ن و حـ}} = \frac{\text{مساحة المثلث أ ن و}}{\text{مساحة المثلث حـ ن و}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و حـ}}$$

في المثلث أ ب حـ : $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}} \times \frac{\text{حـ و}}{\text{و أ}} = ١$

$$\therefore \frac{٢}{٣} \times \frac{٦}{٥} \times \frac{\text{حـ و}}{\text{و أ}} = ١$$

$$\therefore \frac{\text{أ و}}{\text{و حـ}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\therefore \frac{\text{حجم الهرم م أ ن و}}{\text{حجم الهرم م ن و حـ}} = \frac{٤}{٥}$$

تاسعاً : أمثلة من الميكانيكا

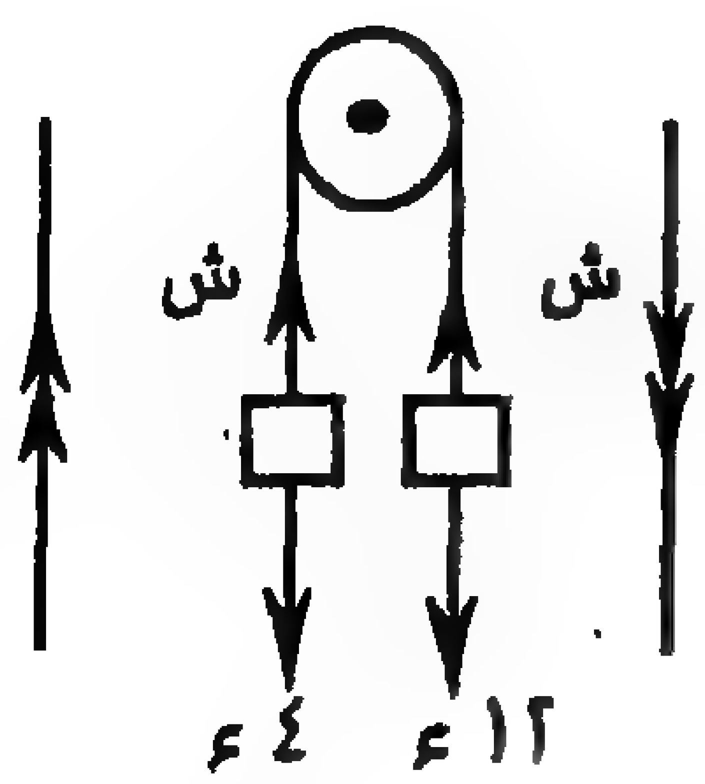
مثـال (١) :

جسمان كتلتهما ١٢ب ، ٤ ب علي الترتيب مربوطان بخيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء . بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كانت الكتلتان على مستوى أفقي واحد يبعد عن سطح الأرض مسافة ١٩٦ قدم .

فإذا قطع الخيط بعد ١ ث من بدء الحركة ، فأوجد زمن وصول كل من الكتلتين إلى سطح الأرض من لحظة قطع الخيط .

يمكن التفكير في حل هذا المثال على النحو التالي :

قبل قطع الخيط :



تتحرك الكتلة ١٢ ب رأسيا لأسفل ، وتتحرك الكتلة ٤ ب رأسيا لأعلى ، بعجلة (حـ) تزايدية ، وتكتسب المجموعة سرعة ما تكون بمثابة السرعة الابتدائية لكل من الكتلتين بعد قطع الخيط .

بعد قطع الخيط :

تستمر الكتلة ١٢ ب حركتها لأسفل بسرعة إبتدائية تساوى سرعة المجموعة قبل قطع الخيط مباشرة ، وبعجلة = ٣٢ قدم/ث٢ (عجلة الجاذبية الأرضية) . أيضا ، تستمر الكتلة ٤ ب حركتها لأعلى بسرعة إبتدائية تساوي سرعة المجموعة قبل قطع الخيط مباشرة ، وبعجلة المجموعة إلى أن تفقد سرعتها ، فتبدأ الكتلة ٤ ب العودة لأسفل تحت تأثير الجاذبية الأرضية

ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

قبل قطع الخيط :

معادلات حركة المجموعة :

١٢ ء - ش = ١٢ حـ (١)

ش - ٤ ء = ٤ حـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على :

حـ = ١٦ قدم . ث٢

، ع = حـ ن = ١٦ × ١ = ١٦ قدم / ث

، ف = $\frac{١}{٢}$ حـ ن^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × (١)^{٢} = ٨ قدم .

إذن :

إرتفاع الكتلة الهابطة عن سطح الأرض = ١٩٦ - ٤ = ١٩٢ قدم .

إرتفاع الكتلة الصاعدة عن سطح الأرض = ١٩٦ + ٤ = ٢٠٠ قدم .

بعد قطع الخيط :

بالنسبة للكتلة الهابطة

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢}

١٩٢ = ١٦ ن + $\frac{١}{٢}$ × ٣٢ × ن^{٢}

إذن: ن = زمن وصول الكتلة ١٢ ب لسطح الأرض = ٣ ث .

بالنسبة للكتلة الصاعدة

$ع^٢ = ع_٠^٢ - ٢ ح ف$

$٠ = (١٦)^٢ - ٢ × ١٦ × ف$ ومنها ف = ٨ قدم

إذن : أقصى ارتفاع تصل إليه الكتلة الصاعدة عن سطح الأرض

= ٢٠٠ + ٨ = ٢٠٨ قدم

$ف = \frac{١}{٢} ء ن^٢$

$٢٠٨ = \frac{١}{٢} × ٣٢ × ن^٢$

$∴ ن^٢ = \frac{٥٢}{٤}$

$∴$ ن = زمن وصول الكتلة ٤ ب لسطح الأرض = $\frac{\sqrt{٥٢}}{٢}$ ث .

مثـال (٢) :

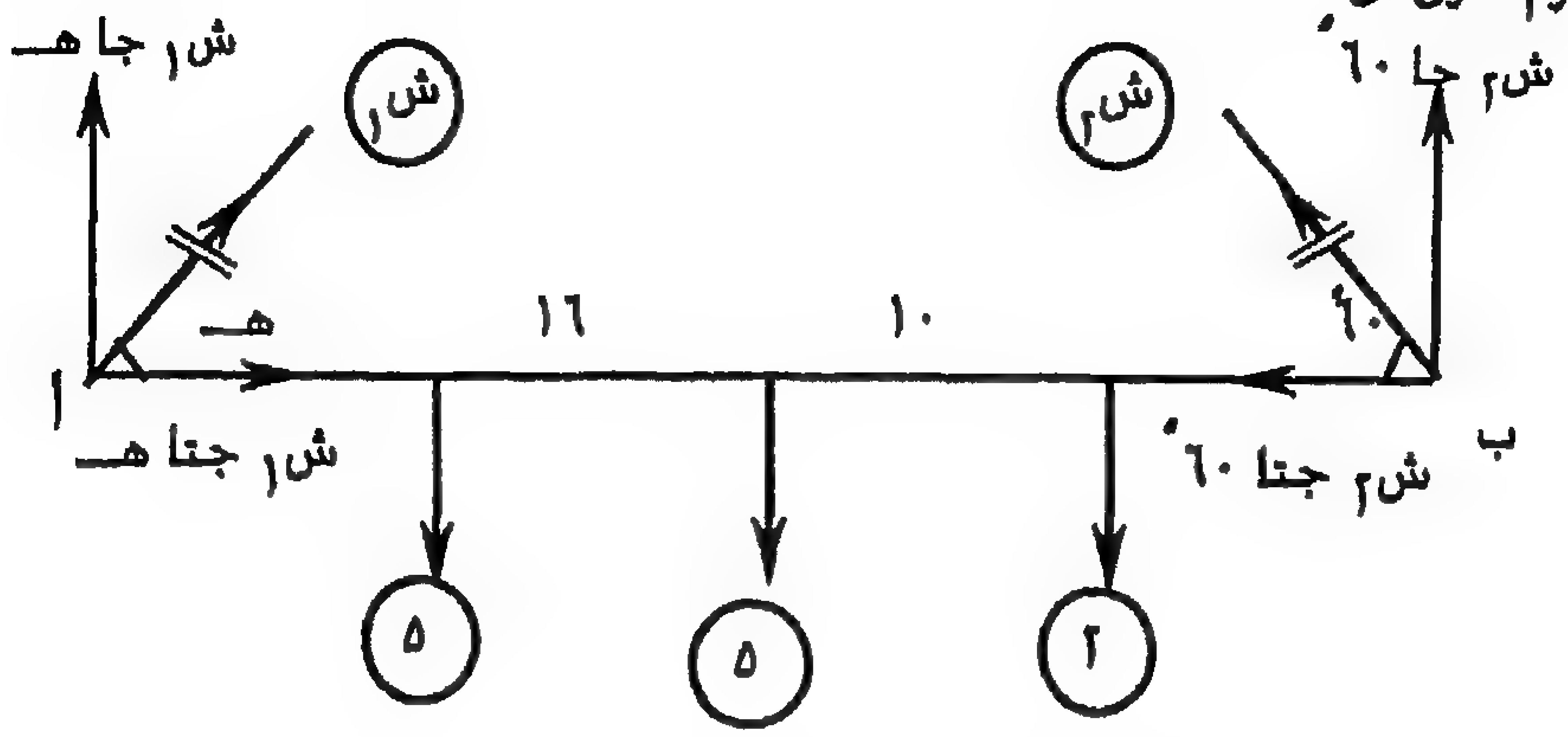
أ ب قضيب طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٥ ث . كجم ، معلق من طرفيه أ ، ب بحبلين خفيفين مثبت طرفاهما الأخران في نقطة في سقف غرفة ، وعلق في القضيب كتلتان مقدارهما ٥ ، ٢ كجم على بعد ٤ سم ، ٣٠ سم من الطرف أ على التوالي ، فإذا إتزن القضيب في وضع أفقي والحبلان في مستوى رأسي ، والحبل عند ب يميل بزاوية ٦٠ ° على القضيب ، فأوجد الشد في كل من الحبلين وظل زاوية ميل الحبل عند أ على القضيب.

الحـل :

تقدم فكرة الحل على أساس القاعدة التالية :

حيث أن المجموعة متزنة ، فيكون المجموع الجبري لعزوم القوى حول أي نقطة = صفر.

ولكن المشكلة هنا تكمن فى قوتى الشد ش ١ . ش٢ فى الخيطين ، إذ أنهما يميلان على القضيب بزاويتين هـ ، ٦٠° على الترتيب ، ولذا نحلل أولا كل من قوتى الشد ش١ ، ش٢ فى اتجاهين متعامدتين (كما بالشكل) حتي يمكن إيجاد العزم حول أى نقطة :



ويمكن تسجيل الحل على النحو التالى :

ع أ :

ش٢ جا ٦٠ × ٤٠ - ٢ × ٣٠ - ٥ × ٢٠ - ٥ × ٤ = ٠

ش٢ = ٣ $\sqrt{٣}$ (١)

ع ب :

٢ش - ١٠ + ٥ × ٢٠ + ٥ × ٣٦ - ش١ جا هـ × ٤٠ = ٠

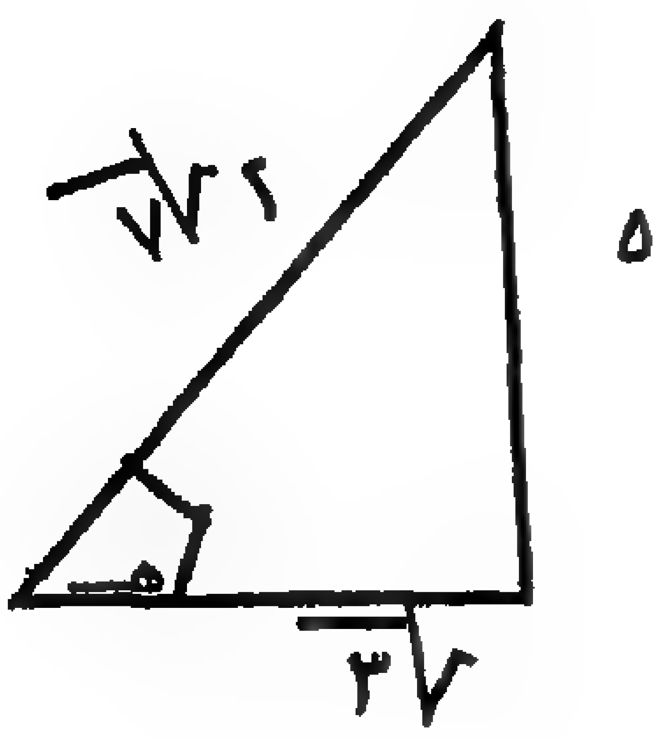
ش١ جا هـ = $\frac{١٥}{٢}$ (٢)

حيث أن المجموعة متزنة

∴ مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الأفقى = صفر

∴ ش١ جتا هـ = ش٢ جتا ٦٠

إذن : ش$_{١}$ جتا هـ = ٣ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ (٣)



بقسمة (٢) ، (٣) نحصل على

$$\frac{\text{ش}_{١}\ \text{جا هـ}}{\text{ش}_{١}\ \text{جتا هـ}} = \text{ظا هـ} = \frac{٥}{\sqrt{٣}}$$

إذن : جا هـ = $\frac{٥}{٢\sqrt{٧}}$

من (٢) : ش$_{١}$ × $\frac{٥}{٢\sqrt{٧}}$ = $\frac{١٥}{٢}$ ⟵ ش$_{١}$ = ٣ $\sqrt{٧}$

محتويات الكتاب

صدر للمؤلف

- في أدبيات المنهج التربوى.
- قضايا تربوية وتعليمية معاصرة.